R

ath. P. 78 g

Clairaut

<36633525320010

<36633525320010

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P.

1239

R

Mathemat.
p. 225.

Clairaut

Des

Herrn Clairaut,

der Königl. Französischen und Königl. Preußischen Akademien der Wissenschaften, der Königl. Gesellschaften zu London, Upsal und Edimburg, und der Akademie des Instituts zu Bologna Mitglieds,

Anfangsgründe der ALGEBRA.

Aus dem Französischen übersetzt von C. Mylius.

BERLIN, verlegts Christoph Gottlieb Nicolai, 1752.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede des Uebersetzers.

Daß die Naturlehre nicht ohne die Mathematik seyn kann, dieses ist eine alte Wahrheit, und daß ein Mathematikverständiger die Algebra verstehen muß, diese Wahrheit ist zwar etwas neuer: aber sie ist doch so ausgemacht, daß sie meines Beweises nicht bedarf. Ich führe sie nur deswegen hier an, weil sie Ursache ist, warum ich die *Elémens d'Algébre* des Herrn Clairaut, welche 1746. zu Paris herausgekommen, übersetzet habe.

Bey den vielen Anweisungen zur Algebra, welche wir in verschiedenen Sprachen haben, hat es bisher doch unstreitig an einer recht deut=

deutlichen und vollständigen gefehlet. Wer bisher die Algebra hat lernen, und etwas nicht ganz gemeines darinne thun wollen, der hat entweder zu einer Rechenmaschine von der Natur bestimmt seyn, oder centnerschwere Gedult, in Erlernung derselben, durch seinen Fleiß haben müssen; und die Lehrer, welche die Anfangsgründe der Algebra mündlich vorzutragen gehabt, haben fast mehr Mühe gehabt, das Dunkle, Verwirrte und Mangelhafte derer Lehrbücher, welcher sie sich bedienet, deutlich zu machen, zu verbessern, und zu ersetzen, als die Regeln der Auflösungskunst an sich selbst zu erklären.

Herr Clairaut hat also unstreitig allen algebraischen Lehrern und Anfängern einen großen Dienst gethan, daß er die Anfangsgründe der Algebra auf eine so deutliche und leichte Art vorgetragen, daß einer, der nur nicht von gar zu schwachem Verstande ist, und die nöthige Gedult dazu hat, diese Wissenschaft, ohne Hülfe eines Lehrers, aus diesem vortreflichen Buche lernen kann, und vorher nichts, als die allgemeinen Gründe der Rechenkunst, zu wissen braucht. Ich hoffe also von meinem Vaterlande gleichfalls Dank zu verdienen, da ich dieses Buch übersetzt liefere, als wodurch es bey uns von allgemeinerem Gebrauche wird. Ich zweifle nicht, die Leh-

rer der Algebra, besonders auf Hohenschulen, werden sich dieser Uebersetzung bedienen, und den Clairaut, als einen claßischen Schriftsteller, in dieser Wissenschaft einführen.

Statt aller Zeugnisse von dem Werthe dieses Werkes, will ich das Urtheil des berühmten Mathematikverständigen, Herrn **Daniel Bernoulli**, anführen. Es befindet sich in einem Briefe desselben an den Herrn **Garcin**, welcher in den *Mercure suisse Janv. 1747.* eingerücket worden, und lautet also:

„**Die Anfangsgründe der Algebra** des „Herrn Clairaut, welcher, wie Sie wis„sen, eine von den Zierden der Akademie „der Wissenschaften zu Paris ist, sind end„lich herausgekommen. Der Name des „Verfassers, und die **Anfangsgründe der** „**Geometrie**, welche wir, in eben dem Ge„schmack, wie das Werk, welches ich Ihnen „ankündige, von ihm haben, hatten gemacht, „daß man es mit Ungedult erwartete. Ob„gleich der Titel dieses Buchs nichts neues „zu versprechen scheinet: so kann man doch „sagen, daß die von dem Verfasser beobach„tete Lehrart ihm alles Ansehen der Neuheit „giebt. Denn er hat ein Mittel gefunden, „den Leser, so zu sagen, von sich selbst Sa„chen erfinden zu lassen, welche er aus an„

„dern Büchern zu begreifen, Mühe genug
„gehabt haben würde. Man hatte, beson=
„ders im Französischen, eine Abhandlung von
„der Algebra sehr nöthig, welche nach einer
„gewissen Lehrart, deutlich, und nicht allzu=
„weitläuftig, auch nicht allzu kurz, abgefas=
„set wäre. Diese, von welcher ich Ihnen
„itzo sage, hat alle diese Eigenschaften, und
„man muß dem Verfasser derselben desto
„mehr dafür verbunden seyn, da es den Ma=
„thematikern vom ersten Range, welche sich
„an erhabene Betrachtungen gewöhnet ha=
„ben, gemeiniglich schwer fällt, sich mit An=
„fangsgründen zu beschäftigen, und zum
„Nutzen der Anfänger zu arbeiten. Viel=
„leicht bilden sie sich auch fälschlich ein, es
„wäre weniger Ehre dabey, an den Anfangs=
„gründen der Wissenschaften zu arbeiten, so
„grossen Vortheil auch die Welt davon ha=
„ben kann, als seine Scharfsinnigkeit durch
„erhabnere Entdeckungen zu zeigen; und
„vielleicht sind sie, wegen dieser falschen
„Meynung, nicht großmüthig genug, ihre
„Eigenliebe dem gemeinen Nutzen aufzu=
„opfern. Daher kömmt es zum Exempel,
„daß die allgemeine Rechenkunst des Herrn
„**Newton**, welche, dem Ansehen nach, ein
„Schulbuch seyn soll, lange noch nicht von
„Schülern verstanden werden kann, indem
„die=

„diejenigen, welche sie ihnen erklären sollen,
„selbst Mühe haben, sie zu verstehen, und
„es scheinet, als ob Herr Newton, so gar
„auch in diesen Anfangsgründen, mehr zur
„Absicht gehabt habe, bewundert, als ver-
„standen zu werden. Herr Clairaut begnü-
„get sich nicht nur, das, was Herr Newton
„in eine große Dunkelheit eingehüllet hatte,
„auf eine sehr leichte Art zu erklären und
„deutlich zu machen; sondern er füget auch
„die Beweise hinzu, welche dieser zu unter-
„drücken pflegte. Kurz, damit ich Ihnen
„meine Meynung von dem Buche des Herrn
„Clairaut mit zwey Worten sage, ich
„finde, daß dieses Werk, ob es gleich nur
„die ersten Anfangsgründe enthält, gleich-
„wohl seinem Verfasser nicht weniger Ehre
„macht, als seine andern Schriften, welche
„ihm mit größtem Rechte den Ruhm eines
„der geschicktesten Mathematikverständigen
„unserer Zeit erworben haben, und ich gestehe
„Ihnen, daß ich es so sehr nach meinem Ge-
„schmacke zu seyn befinde, daß ich wollte, daß
„es jedermann bekannt und von jedermann
„gelesen würde ꝛc.

Ich habe mir alle Mühe gegeben, diese Uebersetzung meinen Landsleuten so nützlich zu machen, als die Urschrift den Franzosen ist. Daher habe ich mich nicht begnüget, die

Rechnungen richtig abzuschreiben, sondern da ich befunden, daß von den vielen Druckfehlern der Urschrift nicht die Hälfte am Ende des Werks angemerket worden, so habe ich alle Rechnungen, bey welchen mir die Richtigkeit des Abdrucks nicht bald in die Augen gefallen, selbst gemacht, um dadurch sowohl bey dem, was in der Urschrift recht gedruckt war, desto sicherer zu seyn, als auch vornehmlich, mich zu hüten, daß ich nicht die Druckfehler mit übersetzte, sondern dieselbigen zu verbessern. Meine Handschrift habe ich hernach, wie sichs gehöret, aufmerksam durchgelesen und gegen die verbesserte Urschrift gehalten. Bey dem Abdrucke hat man sich zugleich meines verbesserten französischen Exemplares bedienet, und derselbe ist nicht nur mit allem Fleiße corrigiret, sondern auch hernach noch von einem gelehrten Mathematikverständigen genau durchgesehen worden, welcher, da er seine Zeit ohne Zweifel zu erhabenern Verrichtungen hätte anwenden können, dennoch, aus Liebe zum gemeinen Besten, kein Bedenken getragen hat, sich dieser verdrießlichen Arbeit mit aller möglichen Gedult und Aufmerksamkeit zu unterziehen. Diese Vorsicht war desto nöthiger, da meine Uebersetzung auswärts gedruckt worden, und ich also die eigentliche Correctur nicht selbst besorgen können.

nen. Inzwischen habe ich, nach gänzlich vollendetem Abdrucke, das ganze Werck selbst noch genau durchgegangen; da ich denn, zum Ruhme des Setzers, gestehen muß, daß mir die sehr wenigen Druckfehler, welche ich noch gefunden, und am Ende beygefüget habe, meine darauf gewendete Mühe kaum belohnet haben; wofür ich aber denen, welche Schuld an diesem Zeitverluste sind, vielmehr verbunden bin, als wenn ich sagen müßte, daß meine Mühe sehr nöthig, und meine Zeit sehr wohl angewandt gewesen wäre.

Was nun meine Schreibart anbelanget, und ob die deutschen Anfänger den Herrn Clairaut so gut verstehen werden, als ihn die französischen verstehen können, das ist eine Frage, deren Entscheidung bloß von dem Erfolge zu erwarten ist. Es ist genug, wenn ich versichere, daß ich gethan habe, was mir möglich gewesen. In Beobachtung der Reinigkeit der deutschen Sprache, habe ich eine gewisse Mittelstrasse erwählet, welcher man in den meisten Wissenschaften, wenn man sie in unserer Muttersprache vorträgt, nothwendig folgen muß, wofern man nicht eben alsdenn dunkel werden will, wenn man am deutlichsten seyn will. Ich habe es daher mit vielen in der Mathematik gewöhn-

lichen Wörtern so machen müssen, wie es die Franzosen fast mit allen Kunstwörtern machen. Ich habe sie lassen müssen, wie sie sind, und mich begnügen müssen, ihnen, wenn es möglich gewesen, eine deutsche Endung zu geben. Diejenigen Wortschmiede irren sich gemeiniglich sehr, welche die Kunstwörter nicht sowohl nach ihrer innern Bedeutung, als, so zu sagen, von Sylbe zu Sylbe, übersetzen. Man wird mich also keiner Nachläßigkeit, in Beobachtung der Reinigkeit der deutschen Sprache, beschuldigen, wenn ich die Deutlichkeit dem strengen Eigensinn einer vermeynten Reinigkeit vorgezogen habe. Ich habe wenigstens nicht der erste seyn wollen, welcher anstatt Irrationalgrößen, **unvernünftige Größen**, anstatt **cubiren, würfeln**, anstatt Coefficienten, **Mitmacher** und dergleichen setzt. Wenn mancher, der nichts von der Mathematik versteht, in meiner Uebersetzung dergleichen Wörter erblickt hätte: würde er nicht gedacht haben, was für garstige lüderliche Leute die Algebraisten wären, daß sie von lauter unvernünftigen Sachen, von Spielen, vom Mitmachen und dergleichen redeten? Ob ich mich nun gleich vor neuen Wörtern, so viel möglich, gehütet habe, so habe ich doch auch kein Bedenken getragen,

als=

alsdenn mich ganz deutsch auszudrücken, wenn ich mich zugleich dabey deutlich habe ausdrücken können. Man wird es mit mir bald gewohnt werden, zusammensetzen anstatt addiren, vermehren anstatt multipliciren, theilen anstatt dividiren, entwickeln oder abkürzen anstatt reduciren ꝛc. zu sagen; zumal, da ich die Vorsichtigkeit gebraucht habe, allemal, wenn ich mich eines solchen Worts zum ersten mal bedienet, das französische oder lateinische Wort dazu zu setzen.

Ich hoffe also, daß meine Uebersetzung die Anfänger in den Stand setzen wird, einen tüchtigen Grund zur Algebra zu legen. Sollten die Lehrer, welche sich derselben bedienen, noch einige Erläuterungen dessen, was Herr Clairaut gesagt hat, hinzu zu thun, für nöthig befinden, so werden ihnen unterschiedene einzelne Abhandlungen über die von ihm vorgetragenen Lehren genug Mittel dazu an die Hand geben, und sie werden selbst die erhabenen Lehren eines Eulers zu ihrem und ihrer Schüler Unterricht anwenden können.

Bey dieser Gelegenheit muß ich etwas erinnern, welches Herr Clairaut ganz gewiß ebenfalls zu erwähnen, die Billigkeit gehabt haben würde, wenn es ihm bekannt gewesen

wäre. Er scheint sich fast von allen Beweisen der newtonianischen Lehrsätze für den ersten und einzigen Erfinder zu halten. In Deutschland aber (ich weis nicht, warum nicht auch in Frankreich?) ist bekannt, was **Stübner, Segner** und **Kästner** unter andern hierinne geleistet haben. Ich brauche nicht mehr davon zu sagen, weil ihre hieher gehörige Schriften im Drucke jedermann vor Augen liegen. Aber dieses muß ich noch ins besondere erwähnen, daß der berühmte **Hausen**, in Leipzig, einen Commentar über **Newtons allgemeine Rechenkunst**, worinnen er alle darinnen enthaltene Lehrsätze beweiset, im Manuscript hinterlassen. Es ist daselbst in guten Händen, und es wäre sehr zu wünschen, daß es gedruckt würde: aber so lange die größten Mathematiker entweder nicht reich oder großmüthig genug sind, ihre Werke auf eigene Kosten drucken zu lassen, so lange werden wir auch noch die vortreflichsten Arbeiten dieser großen Geister entbehren müssen.

Damit ich nichts vergessen möchte, was meine Uebersetzung der Anpreisung würdig machen könnte, so habe ich den Herrn **Clairaut** schriftlich ersucht, mir, wenn er etwa einige Aenderung in seinem Werke zu machen nöthig finden sollte, selbige mitzutheilen, um

mich

mich derselben bey meiner Uebersetzung bedienen zu können. Und da ich hörte, daß eine zweyte Auflage von seinen Anfangsgründen der Algebra heraus wäre, so war ich um desto mehr besorgt, daß ein guter Theil meiner Uebersetzung vergebens seyn würde. Herr Clairaut hatte die Gütigkeit, mir sogleich zu antworten, mir sein Vergnügen über meine Uebersetzung zu bezeigen, und mir zu melden, daß zwar eine neue Ausgabe seiner Algebra heraus sey: es sey aber im geringsten keine Veränderung damit vorgenommen worden, als diejenige, welche die Druckfehler erfordert hätten. Er macht mir zugleich neue Hofnung auf den zweyten Theil seines Buchs, in welchem er die Algebra auf die Geometrie anwenden wird, und ist so gütig, mir zu versprechen, daß er mir ein Exemplar davon schicken werde, sobald er heraus sey. Ich kann also meinen Lesern Hofnung machen, daß sie auch diesen practischen Theil in ihrer Muttersprache gedruckt sehen werden; und vielleicht liefert man ihnen auch ehestens eine Uebersetzung der Geometrie des Herrn Clairaut. Berlin, den 5. April 1752.

Vorrede des Verfassers.

Ich habe mir vorgesetzt, in diesem Werke eben derjenigen Lehrart zu folgen, welche ich in meinen Anfangsgründen der Geometrie beobachtet habe. Ich habe mich darinne bemühet, die Regeln der Algebra in einer Ordnung vorzutragen, welcher sich die Erfinder vielleicht bedienet haben. Keine Wahrheit erscheinet darinnen unter der Gestalt eines Lehrsatzes. Sie scheinen alle entdeckt zu werden, indem man sich an denen Aufgaben übt, welche man sich entweder aus Nothwendigkeit, oder aus Neugier, aufzulösen vorgenommen.

Ich glaube, daß in der Handlung nützliche Aufgaben, wo es darauf ankömmt, Summen unter verschiedene Personen, nach dem Verhältniß ihrer Anlagen oder einiger zwischen ihnen gemachten Vergleiche, zu theilen, Gesellschaftsrechnungen ꝛc. diejenigen Aufgaben sind, welche die ersten Algebraisten beschäftiget haben.

Ich

Ich löse erstlich eine der einfachsten von diesen Aufgaben auf, wie man dieses ohne einige Hülfe der Algebra thun könnte. Bey dieser Auflösung kann man leicht sehen, daß, wenn das Gedächtniß zureicht, alle Schlüsse zu behalten, welche man machen muß, um zu derselben zu gelangen, dieses alsdenn angeht, wenn die Reihe dieser Schlüsse nicht allzu lang ist. Man sieht aber zugleich, daß, wenn man zu Aufgaben fortgehet, welche eine größere Reihe Schlüsse erfordern, man sich bemühen muß, sie auf das kürzeste aufzuschreiben. Man muß sich einige Zeichen ausdenken, durch welche man das ausdrücken kann, worauf die Schwierigkeit bey jedem Schritte, den man thut, die Aufgabe aufzulösen, ankömmt. Diese Art, die Fragen aufzuschreiben, ist die Algebra, welche ich, so zu sagen, den Leser erfinden lasse.

Um allezeit von dem Einfachsten auf das am meisten zusammengesetzte fortzugehen, werfe ich anfänglich nur Fragen in Zahlen auf, weil darauf die Gedanken der Anfänger am meisten haften. Nachdem man unterschiedene solche Aufgaben, welche von einander nur durch die in der Aufgabe gegebene Zahlen unterschieden sind, aufgelöset hat, so merkt man leicht, daß alle Auflösungen einen Theil der Operation allemal mit einander gemein

mein haben, und daß es zu wünschen wäre, daß man die Operation nur einmal verrichten dürfte. Bey dieser Gelegenheit erkläre ich die Art, wie man die Aufgaben allgemein auflöset, indem man sich, anstatt der durch die Bedingungen gegebenen Zahlen, gewisser Buchstaben bedienet, welche alle Arten von Größen ausdrücken, und zeige hernach, wie man aus den allgemeinen Auflösungen die besondern Auflösungen herleitet, indem man Zahlen an die Stellen der Buchstaben setzt.

Unter den verschiedenen Aufgaben, in welchen ich mich der Buchstaben, anstatt der Zahlen, bediene, finden sich ziemlich verwickelte, welche man nicht auflösen kann, ohne sich der Regeln der Zusammensetzung, der Abziehung, der Vermehrung und der Theilung zu bedienen. Hier zeige ich, wie man dieses alles verrichtet. Ich habe nicht für rathsam gehalten, dieses eher zu zeigen, weil den Anfängern dergleichen Verrichtungen mühsam und verdrießlich sind, wenn man sie dieselben zu einer Zeit lehret, da sie noch keinen Begriff von denen Größen haben, mit welchen sie umgehen.

Unter allen diesen Verrichtungen hält die Vermehrung die Anfänger gemeiniglich am meisten auf, und die Erklärung derselben macht den Lehrern die meiste Mühe. Der in dieser

Lehre

Lehre enthaltene Grundsatz, daß das Product zwoer negativen Größen eine positive Größe ist, ist fast beständig beyden ein Stein des Anstoßens.

Das Anstößige hierbey zu vermeiden, führe ich diesen Grundsatz nicht eher ein, als bis ich Operationen habe machen lassen, aus welchen man dessen Nothwendigkeit hat einsehen müssen. Ich zeige erstlich, wie man eine aus positiven und negativen Gliedern zusammengesetzte Größe vermehret, und zwar durch ein einziges Glied, welches ich allemal als positiv voraussetze, weil man anfänglich sich nicht darein finden kann, sich eine negative Größe allein, ohne bey einer andern zu stehen, vorzustellen. Nachdem diese Vermehrung erkläret worden, so gehe ich zu derjenigen fort, da die vermehrende Größe eben sowohl, als die zu vermehrende, aus verschiedenen positiven und negativen Gliedern besteht, und zeige, daß diese Verrichtung nichts anders ist, als die erstere, so vielmal wiederholet, als Glieder in dem Vermehrer sind, und daß, nachdem die Glieder dieses Vermehrers positiv oder negativ sind, die herauskommenden Producte entweder hinzugesetzt, oder abgezogen werden müssen.

Hierdurch mache ich die Anfänger mit der Vermehrung bekannt, ohne daß ich nöthig habe, diese gewöhnliche Grundsätze auszudrü-

zudrücken: Minus durch plus giebt minus; minus durch minus giebt plus ꝛc. welche, da sie den Ohren in den Worten einen Widerspruch vorbringen, fast allezeit machen, daß man glaubt, es sey auch ein Widerspruch in der Sache.

Man könnte anfänglich glauben, ich hätte die Schwierigkeit nur zum Schein gehoben, und ich würde sie auch in der That nur zum Schein heben, wenn ich nicht von der Vermehrung bloß negativer Größen durch andere auch gänzlich negative Größen redete; eine Operation, bey welcher man den itzt gedachten scheinbaren Widerspruch nicht vermeiden kann. Aber ich handele diese Vermehrung aus dem Grunde ab, nachdem ich dem Leser die Nothwendigkeit derselben gezeigt habe, indem ich ihn zu einer Aufgabe führe, wo man genöthiget ist, negative Größen unabhängig von positiven Größen, von welchen sie etwan abgezogen wären, zu betrachten.

Nachdem ich in dieser Aufgabe bis dahin gekommen bin, wo man negative Größen durch einander vermehren oder theilen muß, so mache ich es so, wie es ohne Zweifel die ersten Analysten gemacht haben, welche dergleichen Berechnungen vorgehabt, und einen ganz sichern Weg haben gehen wollen. Ich suche eine andere Auflösung der Aufgabe,

durch

durch welche ich alle Arten der Vermehrung oder Theilung negativer Größen vermeiden kann. Hierdurch bringe ich das gesuchte heraus, ohne mich anderer Schlüsse zu bedienen, als derjenigen, bey welchen einem kein Zweifel beyfallen kann, und ich sehe, was diese Producte oder Quotienten negativer Größen seyn müssen, welche mir die erste Auflösung gegeben hatte. Es ist hernach leicht, hieraus diese so berüchtigten Grundsätze zu ziehen, daß **minus** durch **minus plus** giebt ꝛc.

Ich benehme also diesen Grundsätzen alles Anstößige, und der Leser lernt zugleich die Natur der negativen Auflösungen der Aufgaben kennen; er lernt diese so nützliche Wahrheit, daß, wenn man durch eine Auflösung findet, daß die unbekannte Größe negativ ist, sie in einem Verstande muß genommen werden, welcher demjenigen entgegen gesetzt ist, in welchem man sie, bey Ausdrückung der Bedingungen der Aufgabe, genommen hatte.

In dem ersten Theile dieses Werks wird bloß von den Gleichungen vom ersten Grade, sowohl mit einer, als mit mehreren unbekannten Größen, und von allen denen Verrichtungen gehandelt, welche diese Gleichungen erfordern, sowohl, um zu ihrer Auflösung zu gelangen, als auch, um sie so einfach zu machen, als es möglich ist. Dergleichen ist z. E. die Regel,

nach welcher man den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen muß, welche aus der Nothwendigkeit, einen Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck zu bringen, entspringt. Diese Regel wird auf eine neue Art erkläret, und ich habe verschiedene Betrachtungen beygefüget, durch welche man sie auf Fälle anwenden kann, in welchen die gewöhnliche Art, sie abzuhandeln, einen durch die langweiligen Rechnungen von ihrem Gebrauche abschrecken könnte, und vielleicht nicht allemal die gesuchte Größe geben würde.

In dem zweyten Theile rede ich von den Gleichungen vom zweyten Grade. Eine Aufgabe, wo Zinsen von Zinsen gesucht werden, führt mich auf eine von diesen Gleichungen. Ich habe eine solche erwählet, deren beyde Auflösungen zwo positive Zahlen geben, um desto besser zu zeigen, wie zwo unterschiedene Zahlen einerley Aufgabe auflösen. Ich habe mich einer solchen bedienet, damit die Anfänger, welche die negativen Wurzeln nicht gern für wahre Auflösungen halten, nicht meynen möchten, die Aufgabe habe wirklich nicht mehr, als eine Auflösung.

Um sie aber doch an die negativen Wurzeln zu gewöhnen, nehme ich hernach eine Aufgabe vor, in welcher eine von diesen Wurzeln

zeln ist, welche aber doch so beschaffen ist, daß ein jeder Anfänger nothwendig einsehen muß, daß sie der Aufgabe eben sowohl Genügen thut, als die positive.

Die Auflösung der Gleichungen, welche diese Aufgaben und die von eben der Art, welche man sich aufgeben kann, erfordern, machen, daß die Leser verschiedene in der Algebra unentbehrliche Operationen lernen, als die Ausziehungen der Quadratwurzeln, die Entwickelung der Wurzelgrößen, ihre Zusammensetzungen, Abziehungen *rc.* Man lehrt diese Verrichtungen gemeiniglich zu Anfange der Anfangsgünde der Algebra: nach meinem Entwurf aber müßten sie hier ihren Platz erhalten.

Von diesen Verrichtungen gehe ich zu einer Aufgabe fort, in welcher man verschiedene Gleichungen vom zweyten Grade haben muß, wovon jede verschiedene unbekannte Größen enthält; da ich denn die Mittel zeige, wie man alle diese Gleichungen auf eine einzige herunter setzen kann, in welcher nur eine unbekannte Größe ist. Ich zeige zugleich, daß diese Methode nicht nur bey denjenigen Gleichungen anzuwenden ist, welche nur vom zweyten Grade sind, sondern daß sie sich auf alle Grade erstreckt.

Der Gegenstand des dritten Theils sind die Gleichungen von allen Graden überhaupt. Ich handele von der Anzahl ihrer Wurzeln, von den Eigenschaften, daß die Coefficienten des zweyten, des dritten ꝛc. Gliedes entweder die Summe der Wurzeln, oder die Summe der Producte dieser Wurzeln sind ꝛc. Aus diesen Eigenschaften folgere ich die berühmte Regel des Descartes, alle commensurablen Wurzeln, welche in einer Gleichung sind, zu finden; und da diese Methode, wegen der großen Menge Theiler, welche man versuchen muß, erstaunliche Rechnungen verursachet, so zeige ich die Methode des Herrn Newton, welche sich nicht allein auf die commensurablen Wurzeln oder Theiler von einer Dimension, sondern auch auf Theiler von so viel Dimensionen, als man will, erstreckt. Ich begnüge mich nicht daran, den Beweis dieser Methode zu geben, welchen Herr Newton zurückgehalten hatte, sondern ich zeige auch, durch was für einen Weg er sie mag entdecket haben. Ich glaube nicht, daß man diesen Vorzug in dem Beweise des Herrn s'Gravesande antrift, welchen er davon (in seinem Specimine commentarii in arithmeticam vniuersalem, welches sich am Ende seiner Anfangsgründe der Algebra befindet) gegeben hat, und welches der einzige ist, der, ohngeachtet der vielen Abhandlungen von der Algebra, die nach dem Herrn Newton herausgekommen, davon gegeben worden. Inzwischen habe ich doch vernommen, daß der E. P. Jacquier, welcher durch seine Erläuterungen der erhabensten Untersuchungen

des

des Herrn Newton bekannt ist, sich die Freyheit genommen hat, diesen Beweis zu führen: aber das, was er hierinne gethan hat, ist mir nicht bekannt worden.

Uebrigens halte ich mich in diesem und den folgenden Theilen nicht, wie in den beyden vorhergehenden, dabey auf, die Aufgaben zu zeigen, welche vielleicht zu den Gleichungen, die ich untersuche, Gelegenheit gegeben haben; weil ich glaube, daß ich dieses Mittel nicht mehr nöthig habe, die Neugier der Leser zu erregen. Sie haben aus den ersten Aufgaben hinlänglich sehen können, wie nöthig es ist, alle Arten von Gleichungen auflösen zu können.

In dem vierten Theile handele ich von den Gleichungen von allen Graden, wenn sie nicht mehr, als zwey Glieder, haben, oder wenn sie, da sie ihrer drey haben, durch eine bloße Verwandlung, auf die Methode der Gleichungen vom zweyten Grade gebracht werden können. Hierdurch zeige ich den Anfängern viele Operationen mit den Wurzelgrößen von aller Art, und mache ihnen die Erhöhung der Potenzen und die Ausziehung der Wurzeln vollkommen bekannt.

Eine Regel, welche zur vollkommenen Auflösung dieser Gleichungen unumgänglich nöthig ist, und welche in allen Anfangsgründen der Algebra (ausgenommen in des s'Gravesande seinen) ausgelassen worden, ist die Ausziehung der Wur-

zeln aus zum Theil commensurablen, zum Theil incommensurablen Größen. Da Herr Newton diese Regel, nach seiner Gewohnheit, gegeben hat, ohne sie zu beweisen, so handle ich sie hier als eine Aufgabe ab, da denn Entdeckung und Beweis allezeit beysammen sind.

Des Herrn Newton Methode erstreckt sich auf die Zahlengrößen, der Exponent der Wurzel sey, welcher er wolle: aber sie ist nicht auf die Buchstabengrößen anzuwenden, wenn dieser Exponent von mehr, als von dem zweyten Grade, ist. Ich ersetze das, was dieser Methode fehlt, indem ich zeige, wie man mit den Buchstabengrößen verfahren muß. Ferner zeige ich, daß Herrn Newton Methode für die Zahlengrößen in einigen Fällen zu einem Irthum Gelegenheit geben kann, wenn nämlich die Wurzel einer Größe Brüche in sich hat, obgleich die Größe keine enthält. Ich zeige, was man alsdenn thun muß, um diesem Irrthum zuvor zu kommen.

Herr s'Gravesande, welcher dasjenige Stück der allgemeinen Rechenkunst des Herrn Newton erläutert hat, in welchem sich diese Methode befindet, hat die Fälle nicht bemerket, bey welchen diese Methode nicht statt findet, und hat nicht gezeiget, wie man sie auf Buchstabengrößen von allen Graden anwenden kann.

Da alle diese Verrichtungen in dem Fall einer jeden Potenz die Formel der zweytheiligen Größe vor-

voraussetzen, so gebe ich davon einen neuen Beweis, und zeige den verschiedenen Nutzen, welchen man aus dieser Formel ziehen kann, um durch Annäherung alle Arten von Größen zu finden, welche nach Belieben aus Wurzelgrößen, aus Brüchen ꝛc. bestehen, welches die Anfänger zur Auflösungskunst des Unendlichen vorbereiten kann.

Der fünfte Theil handelt von den Gleichungen vom dritten und vierten Grade, welche alle ihre Glieder haben, das ist, welche so verwickelt sind, als sie es seyn können. Ich lehre anfänglich, wie man die Gleichungen vom dritten Grade allgemein auflöset, und zeige hernach die besondern Gleichungen an, wo diese Auflösung den Werth der unbekannten Größe nicht bekannt macht, und dieses ist der Fall, welchen man den nicht zu entwickelnden nennet. In diesen Gleichungen lehre ich, in Ermangelung vollkommener Wurzeln, selbige durch die Annäherung zu finden. Hierzu zu gelangen, zeige ich eine neue viel einfachere Methode, als diejenigen sind, die bisher bekannt geworden. Dadurch erhalte ich gleich bey der ersten Rechnung den Werth der gesuchten Wurzel fast auf ein tausend Theilchen, und bey der zweyten Rechnung finde ich ihr fast auf ein Milliontheilchen, und so weiter.

Ich gehe alsdenn weiter zu den Gleichungen vom vierten Grade, und nachdem ich ihre allgemeine Auflösung gelehret habe, so zeige ich, daß diese Auflösung, so, wie die Auflösung der Glei-

chungen vom zweyten Grade, vor der Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade den Vortheil hat, daß eine einzige und eben dieselbe Formel, durch Hülfe der Zeichen plus und minus, alle Wurzeln der Gleichung ausdrücken kann. Ich beweise auch, was alle Verfasser der Anfangsgründe der Algebra nur vorausgesetzt haben, daß die vier Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade allemal entweder alle viere wirklich, oder alle viere unmöglich, oder daß zwo davon wirklich und zwo unmöglich sind; das ist, ich beweise, daß die unmöglichen Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade, so, wie die vom zweyten Grade, betrachtet werden können, als wenn sie aus einem wirklichen Theile und aus einem Theile, welcher die Quadratwurzel einer negativen Größe ist, zusammengesetzet wären.

Da sich die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade auf die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade gründet, so hat sie, eben wie diese Gleichungen, das Mangelhafte, daß man in einem Falle die Wurzeln nur durch Annäherung bekommen kann. Ich zeige eine ganz einfache Art, diese Annäherung zu finden, indem ich mich derjenigen bediene, welche ich vorher für die Gleichungen vom dritten Grade angegeben hatte.

Was die Gleichung anlangt, welche über den vierten Grad hinaus gehen, so gebe ich keine Regeln zu ihrer allgemeinen Auflösung, weil man bisher noch nicht dazu hat gelangen können, so viel Mühe sich auch die Analysten deswegen gegeben

geben haben. Man muß sich, ausgenommen in einigen besondern Fällen, von welchen ich größtentheils im dritten und vierten Theile gehandelt habe, an bloßen Annäherungen begnügen; und da diese Annäherungen viel leichter sind, wenn einem die Geometrie zu Hülfe kömmt, so setze ich die Abhandlung dieser Gleichungen aus, bis ich die Theorie der krummen Linien zeigen werde.

Aus dem, was ich gesagt, da ich meine Anfangsgründe der Algebra angekündiget, hätte man schließen sollen, daß man darinnen Anwendungen dieser Wissenschaft auf die Geometrie finden würde. Ich habe es aber für rathsam gehalten, dieselben in einem andern Werke vorzutragen. Ich habe geglaubt, daß, indem ich eine vollständige Abhandlung von der Algebra liefere, ich den Anfängern Mittel an die Hand gebe, sich darinne fest zu setzen, und daß es zu ihrem Besten gereichen würde, wenn sie selbige nicht eher auf die Geometrie anwendeten, als bis ihnen die analytischen Operationen keine Mühe mehr kosten. Ich hoffe, daß die Anfangsgründe, welche sie in diesem Werke finden werden, sie in den Stand setzen werden, die größten Schwierigkeiten, welche sie in der höhern Geometrie antreffen werden, zu übersteigen.

Uebrigens setze ich, um dieses Buch zu verstehen, weiter nichts voraus, als die vornehmsten arithmetischen Verrichtungen, worunter ich die Regel Detri rechne. Diejenigen, welche meine Anfangsgründe der Geometrie gelesen haben,

wer-

werden die Lehre von den Proportionen so weit inne haben, als es zum Verstande alles dessen, was ich hier sage, nöthig ist. Ich wollte anfangs in einem und eben demselben Buche die Anfangsgründe sowohl der Rechenkunst, als auch der Algebra, vortragen. Aber, wegen der von mir beobachteten Ordnung, schien mir es nöthig zu seyn, diese beyden Wissenschaften jede besonders abzuhandeln. Ich mußte auch wirklich, da ich mich, so viel möglich, dem Wege der Erfinder nähern wollte, voraussetzen, daß die Rechenkunst denen bekannt sey, welche die Algebra wollen verstehen lernen.

Anfangsgründe
der
ALGEBRA.

Erster Theil.
Von der
Algebraischen Methode, die Aufgaben durch Gleichungen auszudrücken, und von der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

Unter den verschiedenen Aufgaben, womit sich die ersten Mathematiker, welche den Namen Algebraisten gehabt, beschäfftiget haben, wähle ich folgende, weil sie sehr geschickt ist, zu zeigen, wie sie darauf gekommen sind, die Wissenschaft daraus zu machen, welche man Algebra oder die Auflösungskunst nennet.

I.

Exempel einer Aufgabe, dergleichen sich die ersten Algebraisten vielleicht aufgegeben haben.

Eine Summe, zum Exempel 890 Thl. unter drey Personen zu theilen, so, daß der erste 180 Thl. mehr, als der zweyte, und der zweyte 115 Thl. mehr bekomme, als der dritte.

Ich bilde mir ein, daß einer, welcher, ohne das geringste von der Algebra zu wissen, diese Aufgabe aufgelöset, folgende Schlüsse gemacht hat.

Auflösung dieser Aufgabe ohne Algebra.

Es ist offenbar, daß, wenn man einen von den drey Theilen wüßte, man auch sogleich die beyden andern wissen würde. Wir wollen setzen, man wüßte z. E. den dritten Theil, welcher der kleinste ist. Zu diesem wird man 115 Thl. hinzu thun müssen, wenn man den Werth des zweyten Theils wird haben wollen. Den ersten Theil zu bekommen, wird man hernach 180 Thl. zu diesem zweyten Theil hinzuthun müssen; welches eben so viel ist, als wenn man 180 Thl. und 115 Thl. oder 295 Thl. zu dem dritten Theil hinzusetzte.

Der dritte Theil mag nun seyn, so groß er will, so wissen wir nunmehr, daß dieser Theil, und dieser Theil nebst 115 Thln. und noch einmal dieser Theil nebst 295 Thln. eine Summe von 890 Thln. ausmachen muß.

Hieraus folgt, daß der kleinste Theil dreymal genommen, und 115 Thl. und 295 Thl. (oder zusammen 410 Thl.) 890 Thln. gleich sind.

Wenn also der gesuchte Theil dreymal genommen, und 410 Thl. gleich sind 890 Thln. so muß dieser gesuchte Theil dreymal genommen um

410 Thl. kleiner seyn, als 890 Thl. Folglich ist der kleinste Theil dreymal genommen gleich 480 Thln. Folglich ist der kleinste Theil gleich 160 Thln.

Der zweyte Theil wird folglich gleich seyn 275 Thln. und der erste oder der größte 455 Thln.

So haben wahrscheinlicher Weise die ersten Algebraisten geschlossen, wenn sie sich dergleichen Fragen aufgegeben haben. Ohne Zweifel merkten sie sich, nachdem sie immer näher zur Auflösung der Frage kamen, alle Schlüsse, welche sie bis dahin, wo sie waren, gebracht hatten; und wenn die Fragen nicht verwickelter waren, als die vorhergehende, so schreckte sie nichts ab, weiter zu gehen: aber nachdem ihnen ihre Untersuchungen mehr Begriffe zu merken gaben, so mußten sie eine kürzere Art suchen, sich auszudrücken. Sie mußten gewisse einfache Zeichen haben, aus welchen sie, sie mochten in der Auflösung einer Aufgabe so weit gekommen seyn, als sie wollten, auf einen Blick sehen konnten, was sie schon gethan hatten, und was sie noch zu thun hätten. Und die besondere Art von einer Sprache, welche sie sich hierzu ausgedacht haben, ist eben die Algebra.

II.

Algebraische Methode, die vorhergehende Aufgabe auszudrücken.

Damit wir die ersten Gründe dieser Wissenschaft desto besser zeigen, wollen wir eben diese Frage wieder vornehmen. Wir wollen in der ordentlichen Sprache die Schlüsse herschreiben, welche der Algebraist macht, seine Aufgabe aufzulösen, und zugleich auch in algebraischen Zei-

chen, das was er nur schreiben darf, um seinem Gedächtniß zu Hülfe zu kommen.

Den kleinsten, oder dritten Theil, er sey so groß, als er wolle, drücke ich durch einen einzigen Buchstaben aus, welcher z. E. seyn mag x.

Der zweyte Theil wird also x und 115 seyn, welches ich also schreibe . . . . $x + 115$,

Das Zeichen + zeiget die Zusammensetzung an.

indem ich das Zeichen + erwähle, welches man durch und (plus) ausdrücket, um dadurch die Zusammensetzung (Addition) der beyden Größen, zwischen welche man es setzt, anzudeuten.

Was den ersten oder größten Theil anlangt, so wird er, weil er um 180 größer ist, als der zweyte, ausgedrücket werden durch $x + 115 + 180$.

Wenn man diese drey Theile zusammensetzt, so wird man haben $3x + 115 + 115 + 180$, oder, wenn man es zusammenzieht $3x + 410$.

Das Zeichen = deutet die Gleichheit an.

Diese Summe der drey Theile aber muß 890 Thln. gleich seyn, welches ich also ausdrücke . . . . $3x + 410 = 890$.

Ich brauche hier das Zeichen =, welches man durch gleich ausspricht, um die Gleichheit der beyden Größen, zwischen welche man es setzet, anzuzeigen.

Die Frage ist also durch diese Rechnung in eine andere verwandelt worden, wo es darauf ankömmt, eine Größe zu finden, welche dreymal genommen mit 410 zusammengesetzt 890 macht. Die Auflösung solcher Fragen finden, das ist das, was man eine Gleichung auflösen nennet. Die Gleichung in gegenwärtigem Falle ist $3x + 410 = 890$. Man nennet sie

Eine Gleichung ist die Gleichheit zwoer Größen.

darum

darum also, weil sie die Gleichheit zwoer Grössen anzeiget. Diese Gleichung auflösen, ist so viel, als den Werth der unbekannten Größe x aus der Bedingung finden, daß sie, dreymal genommen, und 410 dazu gethan, 890 macht.

Man löset eine Gleichung auf, wenn man den Werth der unbekannten Größe findet, welche sie in sich enthält.

III.

Diese Gleichung aufzulösen, macht der Algebraist folgende Schlüsse, und schreibt sie also auf. Aus der aufzulösenden Gleichung . . . . $3x + 410 = 890$ sehe ich, daß man muß setzen ... 410 zu $3x$, damit man die Summe 890 bekomme. Also ist $3x$ um 410 weniger, als 890, welches ich also schreibe . . . $3x = 890 - 410$.

Auflösung der Gleichung, welche die vorhergehende Aufgabe ausdrückt.

Ich bediene mich hier des Zeichens —, welches man durch weniger ausspricht, damit man sich erinnere, daß die Größe, vor welcher es steht, von der, auf welche es folgt, soll abgezogen werden.

Das Zeichen — zeiget das Abziehen an.

Aus dieser neuen Gleichung $3x = 890 - 410$ ziehet man, indem man wirklich 410 von 890 abzieht, diese neue Gleichung . . $3x = 480$.

Wenn aber dreymal x 480 macht, so muß ein x der dritte Theil von 480, oder 160 seyn, welches ich also schreibe . . $x = \frac{480}{3} = 160$. Und so ist die Frage aufgelöset, weil es genug ist, einen von den drey Theilen zu wissen, um die andern zu wissen.

IV.

Wenn man die Frage so, daß man mit Suchung des größten Theils angefangen, hätte auf-

Eine andere Auflösung der

vorhergehenden Aufgabe.

lösen wollen, so hätte man es eben auch thun können.

Dieses würde man auf folgende Art verrichtet haben.

Dieser erste Theil sey . . . . y.

Da der zweyte Theil um 180 kleiner ist, so wird er seyn . . . . $y - 180$.

Und da der dritte Theil um 115 kleiner ist, als der zweyte, so wird er seyn $y - 180 - 115$,

Nun ist aber die Summe dieser drey Grössen . . . . . . $3y - 180 - 180 - 115$, das ist . . . . . $3y - 475$.

Aber diese Summe soll so groß seyn, als 890.

Man hat also die Gleichung $3y - 475 = 890$, welche zeigt, daß $3y$ um 475 mal größer ist, als 890, weil man 475 von $3y$ wegnehmen muß, wenn man 890 haben will. Es ist also $3y = 890 + 475$ oder $3y = 1365$.

Folglich ist y, oder der größte Theil $= 455$, wie oben.

V.

Wenn man in der Aufgabe eine größere oder kleinere Summe, als die, welche man itzo gehabt hat, hätte eintheilen sollen, und wenn die Unterschiede andere Zahlen gewesen wären, als die, welche es itzo gewesen sind, so ist offenbar, daß man sie auf eben diese Art aufgelöset hätte. Wir wollen z. E. setzen, daß die Aufgabe folgende gewesen wäre.

Ein ander Exempel der

9600 unter vier Personen zu theilen, so daß der erste 300 mehr habe, als der zweyte, der zweyte

250

250 mehr, als der dritte, und der dritte 200 mehr, als der vierte.

vorhergehenden Aufgabe.

Man würde folgendermaßen geschlossen haben.

Nennet man den vierten Theil x
so wird der dritte seyn $x + 200$
der zweyte . . . $x + 200 + 250$
der erste . . . $x + 200 + 250 + 300$.

Nun muß aber die Summe aller dieser drey Theile so groß seyn, als 9600. Man hat also die Gleichung . . $4x + 1400 = 9600$.

Diese Gleichung aufzulösen, überlege ich, wie bey der vorhergehenden, daß, wenn $4x$ erst alsdenn so groß sind, als 9600, wenn man 1400 dazu gesetzt hat, dieselben so groß seyn müssen, als das, was übrig bleibt, wenn man 1400 von 9600 abgezogen hat; und dieses schreibt man also . . . . . . $4x = 9600 - 1400$
oder $4x = 8200$.

Wenn aber vier x gleich sind 8200, so ist ein x so viel, als ein Viertel von 8200, das ist, $x = \frac{8200}{4} = 2050$. Da also der kleinste Theil, x, bekannt ist, so findet man die übrigen alle nach einander. Der dritte ist $= 2250$, der zweyte $= 2500$, und der erste $= 2800$.

VI.

Die Aufgabe könnte noch anders seyn, und doch auf einerley Gründe ankommen. Wir wollen z. E. setzen, sie laute also:

5500 in zwey Theile zu theilen, so, daß in dem ersten ein Drittel mehr sey, als in dem zweyten, und noch 180 drüber.

Drittes Exempel der vorhergehenden Aufgabe.

Dieses würde man also auflösen.

Der zweyte Theil sey . . x

So wird man für den ersten haben . . . . . $x + \frac{1}{3}x + 180$.

Da nun ihre Summe 5500 machen soll, so hat man die Gleichung $2x + \frac{1}{3}x + 180 = 5500$. Diese Gleichung aufzulösen, fange ich damit an, daß ich $2x$ und $\frac{1}{3}x$ zusammensetze, welches mir $\frac{7}{3}x$ giebt, weil zwey Ganze sechs Drittel, und also diese zwey Ganze mit einem Drittel sieben Drittel machen. Folglich sieht die vorhergehende Gleichung nunmehr also aus . . . . $\frac{7x}{3} + 180 = 5500$, woraus, aus eben den Ursachen, wie in den vorhergehenden Exempeln, wird $\frac{7x}{3} = 5500 - 180$

oder $\frac{7x}{3} = 5320$.

Wenn nun aber ein Drittel von $7x$ so viel ist, als 5320, so sind $7x$ dreymal so viel; welches man also schreibt . . . $7x = 5320 \times 3$.

Das Zeichen × zeigt die Vermehrung zweyer Größen durch einander an.

Ich bediene mich hier des Zeichens ×, welches man durch durch ausspricht, um dadurch die Vermehrung (Multiplication) der beyden Größen durch einander, zwischen welchen es steht, anzudeuten.

Hernach ist es genug, an statt $7x = 5320 \times 3$, zu schreiben $7x = 15960$, welches man bekömmt, wenn man wirklich 5320 durch 3 vermehret.

Und

Und durch Hülfe dieser neuen Gleichung bekömmt man $x = \frac{15960}{7} = 2280$, den Werth des zweyten Theils.

Der erste Theil wird hernach leicht zu finden seyn, wenn man nur zu 2280 den dritten Theil davon, nämlich 760, und über dieses noch 180, so, wie man es verlanget hatte, hinzusetzt, da man denn 3220 für den ersten Theil bekömmt.

Die Anfänger können sich damit üben, daß sie den Vortrag der vorhergehenden Aufgabe noch mehr verändern, und daß sie sie in den verschiedenen Fällen, welche sie sich ausdenken können, auflösen. Die Fertigkeit, welche sie dadurch erlangen werden, wird ihre Mühe belohnen. Ihnen noch mehr zu Hülfe zu kommen, will ich eine andere Aufgabe aufgeben, welche noch viel Verwandschaft mit der vorhergehenden hat.

VII.

Eine neue Aufgabe, von eben der Art, wie die vorhergehende.

Drey Kaufleute treten in Gesellschaft. Der erste giebt 17000 Thl. der zweyte 13000 Thl. der dritte 10000 Thl. Da sie einen haben müssen, welcher ihre Handlungsgeschäffte besorget, so übernimmt der, welcher nur 10000 Thl. gegeben hat, alle Verrichtungen, mit der Bedingung, daß er von allem Gewinnste 3 von 100 (3 pro Cent) mehr bekomme, als die andern. Der Gewinnst beläuft sich auf 100000 Thl. Nun fragt man, wie viel jeder haben muß?

Der Antheil des ersten sey . . . . x.

Da der zweyte in der Verhältniß 13 zu 17 weniger gegeben hat, so muß er eine in eben

dieser Verhältniß kleinere Summe bekommen, das ist, nur . . . . $\frac{13}{17}x$.

Da der dritte, nach der Verhältniß seines Einsatzes, nur $\frac{10}{17}$ von dem Antheile des ersten haben sollte, dennoch aber 3 von 100 überhaupt, das ist, 3000 Thl. mehr haben muß, so wird sein Antheil seyn . . $\frac{10}{17}x + 3000$.

Und da die Summe dieser drey Antheile 100000 Thl. seyn soll, so bekömmt man . . . . . . $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x + 3000 = 100000$

oder $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x = 97000$.

Damit man die unbekannte Grösse in dieser Gleichung allein bekomme, so überlege man, daß $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ oder $\frac{17}{17}x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ eben so viel bedeutet, als $\frac{40}{17}x$. Man bekömmt also $\frac{40}{17}x = 97000$, oder $40x = 97000 \times 17$, oder $40x = 1649000$, oder $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

Da der Antheil des ersten gefunden ist, so wird der Antheil des zweyten, welcher durch $\frac{13}{17}x$ ausgedrücket wird, seyn $\frac{13}{17} \times 41225$, das ist, 31525, und der Antheil des dritten, welcher durch $\frac{10}{17}x + 3000$ ausgedrücket ward, wird $\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250$ seyn.

VIII.

Die analytische Auflösung einer Aufgabe hat zween Theile.

Aus diesen beyden Aufgaben sehen die Leser, was die Algebra ist, und sie bemerken, daß überhaupt die Auflösung einer Aufgabe aus zween Theilen besteht. In dem ersten Theile benennet man durch einen Buchstaben, z. E. x oder y rc. die unbekannte Größe, welche man sucht, oder eine Größe, welche, wenn sie bekannt wäre, die

In dem ersten drückt man diese Aufgabe durch

die andern Größen bestimmen würde. Hernach sucht man eine Gleichung zu bekommen, worinne die unbekannte Größe ist; welches geschieht, indem man einerley Größe auf zwo verschiedene Arten ausdrückt.

eine Gleichung aus.

In dem zweyten Theile kömmt es darauf an, die unbekannte Größe in der Gleichung von den andern Größen loszumachen.

In dem zweyten löset man diese Gleichung auf.

Der erste von diesen beyden Theilen läßt sich schwer für die Anfänger in deutliche Regeln bringen: man kann ihn bloß durch Exempel wohl begreiflich machen.

Was den andern Theil anlangt, so kann man denselben viel leichter auf eine allgemeine Art begreiflich machen.

IX.

In den itzt aufgelösten Fragen sind wir bis auf Gleichungen gekommen, in welchen die unbekannte Größe bloß durch die Vermehrung oder Theilung (Division) mit bekannten Zahlen verwickelt war. Man nennet diese Arten von Gleichungen, Gleichungen vom ersten Grade. Dergleichen sind $2x - 10 = 56$; $\frac{2}{3}x + 15 = x - \frac{1}{5}x + 30$ ꝛc. Und die Aufgaben, welche zu diesen Gleichungen führen, werden Aufgaben vom ersten Grade genennet.

Die Gleichungen vom ersten Grade sind diejenigen, wo die unbekannte Größe nur mit bekannten Größen vermehret oder getheilet ist.

Man nennet sie so zum Unterschiede von denen, in welchen die unbekannte Größe entweder quadriret * oder cubiret ꝛc. wäre, von welchen man,

* Man wird in der Rechenkunst gelernet haben, daß eine Zahl quadriret oder cubiret heißt, nachdem sie einmal oder zweymal durch sich selbst ist vermeh-

man, eben so, wie von ihren Gleichungen, sagt, daß sie vom zweyten Grade sind, wenn die unbekannte Größe quadriret, vom dritten, wenn sie cubiret ist 2c.

Wenn man z. E. eine Zahl suchte, welche, wenn sie dreymal genommen zu dem Quadrate hinzugesetzt würde, 65 gäbe, so würde die Aufgabe, welche man alsdenn auflösen müßte, vom zweyten Grade seyn. Und die Gleichung $3x + xx = 65$, (in welcher xx das Quadrat von x anzeigt) welche die Bedingungen dieser Aufgabe ausdrücken würde, würde eine Gleichung vom zweyten Grade seyn.

Man hat zu der Auflösung dieser Gleichungen nicht eher kommen können, als bis man sich lange an den Gleichungen vom ersten Grade geübet hat. Wir wollen demnach alle die Regeln aufsuchen, welche zu diesen Gleichungen erfordert werden.

X.

Die Glieder einer Gleichung sind ihre durch die Zeichen + und — von einander abgesonderten Theile.

Dieselben zu finden, wollen wir zuerst die Gleichung, $4x + 1400 = 9600$, welche wir im V. §. vorgehabt, wieder vornehmen. Sie besteht aus drey Gliedern, $4x$, 1400, 9600, (so nennt man alle Theile einer Gleichung, welche durch die Zeichen + und — von einander abgesondert sind) und wir bemerken, daß wir, aus eben der Ursache, aus welcher wir $4x = 9600 - 1400$

ret worden. Man quadriret z. E. 7, wenn man, indem man es durch sich selbst vermehret, 49 daraus macht. Eben so cubiret man diese Zahl, wenn man, indem man sie zweymal durch sich selbst vermehret, 343 daraus macht.

— 1400 daraus hergeleitet haben, in allen Arten der Gleichungen ein jedes Glied, vor welchem das Zeichen + steht, werden wegnehmen, und es auf die andere Seite des Zeichens = setzen können, doch so, daß man das Zeichen — davor setze. Wenn man z. E. $50 + \frac{10}{3}x = 5x + 30$ hat, so wird es erlaubet seyn, das Glied $\frac{10}{3}x$ auf die andere Seite, mit Vorsetzung des Zeichens —, zu bringen, und die Gleichung also zu schreiben, $50 = 5x + 30 - \frac{10}{3}x$. Denn man kann, wie in dem V. §. sagen, daß, weil man $\frac{10}{3}x$ zu 50 hinzusetzen muß, damit 50 der Grösse $5x + 30$ gleich sey, 50 um $\frac{10}{3}x$ kleiner seyn muß, als $5x + 30$, das ist, daß es so groß seyn muß, als $5x + 30 - \frac{10}{3}x$.

Auf eben die Art, wie wir in dem III. §. gesehen haben, daß die Gleichung $3y - 475 = 890$ in $3y = 890 + 475$ verwandelt ward, wird man sehen, daß überhaupt die Glieder, welche auf der einen Seite des Zeichens der Gleichheit ein — haben, auf die andere Seite mit einem + können versetzet werden. Wenn man z. E. $32 - 6x = 9x + 119$ hat, so wird man daraus $32 = 6x + 9x + 119$ bekommen. Denn wenn 32 um $6x$ vermindert werden muß, wenn es $9x + 119$ gleich werden soll, so muß 32 um $6x$ größer seyn, als diese Größe, das ist, 32 muß so groß seyn, als $6x + 9x + 119$.

XI.

Hieraus folgt also ein allgemeiner Grundsatz für alle Gleichungen; und der ist dieser, daß man alle Glieder, welche man will, von einer Seite

Ein jedes Glied kann von einer Seite der

Gleichung auf die andere versezet werden, wenn man seine Zeichen verwechselt.

Seite der Gleichung auf die andere setzen kann, wenn man ihre Zeichen verwechselt. Dieser Grundsatz hat einen sehr großen Nutzen, weil man sich dadurch viel Schlüsse ersparet.

XII.

Man nennet die Hälfte einer Gleichung ihre beyden durch das Zeichen = von einander abgesonderten Theile.

Durch Hülfe dieses Grundsatzes kann man allezeit eine Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher man auf der einen Seite des Zeichens =, das ist, in der einen Hälfte (membro) der Gleichung die Glieder mit einem x, und auf der andern Seite des Zeichens =, das ist, in der andern Hälfte der Gleichung, lauter bekannte Größen hat.

Wenn ich z. E. die Gleichung $8x + 30 = \frac{5}{3} x + 250$ habe, so bringe ich heraus $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$. Habe ich $60 - \frac{5}{4}x = 250 - \frac{7}{3}x$, so bekomme ich daraus $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$, u. s. w.

XIII.

Wenn man nun, nach den nöthigen Versetzungen, alle Glieder mit einem x auf die eine Seite, und alle bekannte Glieder auf die andere Seite gebracht hat, so ist nunmehr das natürlichste, daß man beyde Hälften der Gleichung auf das einfachste ausdrücke. Wenn man z. E. $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$ hat, so bekömmt man sogleich daraus $\frac{19}{3}x = 220$, indem man wirklich 30 von 250 abzieht, und auch $\frac{5}{3}x$ von $8x$, oder von $\frac{24}{3}x$, welches ihm gleich ist, wegnimmt.

Wenn man $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$ hat, so verwandelt man es in $\frac{13}{12}x = 190$, weil, wenn man

man $\frac{7}{3}x$ und $\frac{5}{4}x$ auf einen Nenner bringt, man $\frac{28}{12}x$ und $\frac{15}{12}x$ bekömmt, wovon der Unterschied $\frac{13}{12}x$ ist, und weil, wenn man 60 von 250 abzieht, 190 übrig bleibt.

XIV.

Durch dergleichen Auswickelungen, (Reductiones) welche denen allezeit leicht sind, die die Rechenkunst verstehen, kann man alle Gleichungen vom ersten Grade, so zusammengesetzt sie auch sind, in andere verwandeln, welche nicht mehr, als zwey Glieder, haben, derer erstes aus einer gewissen Anzahl ganzer oder gebrochener x besteht, das andere aber ganz bekannt ist; dergleichen sind die Gleichungen $4x = 8200$, $\frac{7}{3}x = 5320$, welche in dem V. und VI. §. aufgelöset worden.

Wir wollen uns itzo wieder dessen erinnern, was wir von diesen Gleichungen gesagt haben, und daraus allgemeine Grundsätze für alle die übrigen herleiten.

Aus der Gleichung $4x = 8200$ haben wir bekommen $x = \frac{8200}{4}$, weil daraus, daß vier x so viel war, als 8200, folgte, daß ein x nichts anders seyn konnte, als ein Viertel von dieser Summe. Aus diesem Schlusse, und aus denen, welche man auf eben dergleichen Art bey andern Zahlen vor dem x machen würde, leitet man den allgemeinen Grundsatz her, daß man den Vermehrer, (Multiplicator) welcher bey der unbekannten Größe in einer von den beyden Hälften der Gleichung steht, wegbringen kann, wenn man ihn zum Theiler (Divisor) in der andern Hälfte macht.

Wie man den Vermehrer von einer unbekannten Grösse wegschafft.

XV.

XV.

Aus der Gleichung $\frac{7}{3}x = 5320$ haben wir bekommen $7x = 3 \times 5320$, indem wir erwogen, daß, wenn der dritte Theil von $7x$ so groß ist, als 5320, $7x$ ganz dreymal so viel ausmachen müssen. Hieraus folgert man diesen allgemeinen Grundsatz, daß, wenn man den Theiler, welcher bey der unbekannten Größe in der einen Hälfte der Gleichung steht, wegbringen will, man ihn nur zum Vermehrer in der andern Hälfte machen darf.

Wie man den Theiler von einer unbekannten Größe wegschafft.

XVI.

Mit diesen Regeln ist man im Stande, alle Arten der Gleichungen vom ersten Grade aufzulösen. Hier sind einige Exempel zur Uebung der Anfänger.

Exempel von Gleichungen vom ersten Grade, welche nach den vorhergehenden Grundsätzen aufgelöset werden.

$\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ verwandelt man durch die Versetzung in $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$, oder, wenn man es entwickelt, in $\frac{6x}{5} - \frac{2}{3}x = 8$, oder $\frac{18}{15}x - \frac{10}{15}x = 8$, oder $\frac{8x}{15} = 8$, oder $8x = 8 \times 15$, oder endlich $x = 15$.

Eben so wird $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ durch die Versetzung $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$, oder $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19$, oder $\frac{1}{21}x = 19$, oder $x = 399$.

Endlich giebt $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ durch die Versetzung $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$. Welches, wenn man erst $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{4}$ auf einen Nenner bringt, $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$ wird. Wenn man $\frac{7}{5}$ und $\frac{1}{36}$ auf einen Nenner bringt, so bekömmt man hernach $\frac{247}{180}x = 100$, oder $x = \frac{18000}{247}$.

XVII.

Anstatt alle Brüche auf einen Nenner zu bringen, kann man auf folgende Art, hinter welche diejenigen, die sich zuerst mit solchen Gleichungen beschäfftiget, bald haben kommen müssen, alle Theiler, einen nach dem andern, aus der gegebenen Gleichung wegschaffen.

Wie man die Brüche aus einer Gleichung wegschafft.

Wenn wir das vorhergehende Exempel $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, wieder vornehmen, so ist klar, daß, wenn man die beyden Hälften dieser Gleichung durch 9 vermehret, beyde herausgebrachte Producte gleich groß seyn werden; denn wenn gleiche Größen durch einerley Zahl vermehret werden, so muß beydes Herausgebrachte gleich groß seyn. Durch diese Vermehrung wird man also bekommen $\frac{18}{9}x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$; woraus, weil $\frac{18}{9}x = 2x$ ist, $2x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ wird. Nun ist der Theiler 9 aus dieser Gleichung weg, und man sieht wohl, daß dieses nothwendig so kommen mußte; denn $\frac{2}{9}$, sie mögen sich beziehen, auf was für eine Größe sie wollen, müssen, wenn sie durch 9 vermehret werden, 2 Ganze von eben dieser Größe geben. Damit man nun auch die 4 wegschaffe, so muß man alle Glieder der Gleichung durch 4 vermehren, wobey nur in Ansehung des Gliedes $\frac{9}{4}x$ zu beobachten ist, daß die Vermehrung durch 4 geschieht, indem man die 4 unten wegnimmt. Man wird also haben $8x - 9x + \frac{252}{5}x = 3600$, oder $\frac{252}{5}x - x =$

3600; woraus, wenn man die beyden Glieder durch 5 vermehret, $252x - 5x = 18000$, oder $247x = 18000$, oder $x = \frac{18000}{247}$ wird.

Der allgemeine Grundsatz, welchen man hieraus ziehet, ist dieser, daß, wenn man einen Theiler aus einem Gliede wegschaffen will, man die andern Glieder alle durch den Theiler vermehren, und ihn aus dem Gliede, in welchem er ist, weglassen muß.

XVIII.

Wie man sie auf eine andere Art alle auf einmal wegschafft.

Man kann eine Art, alle Theiler auf einmal wegzubringen, finden, wenn man überlegt, daß, wenn man alle Glieder durch eine Zahl vermehret, welche durch einen jeden von diesen Theilern kann getheilet werden, jedes Glied entwickelt werden müsse. Wir wollen z. E. die Gleichung $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$ durch 180 vermehren, welche Zahl durch 9, durch 4, und durch 5 kann getheilet werden: so werden wir bekommen $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{5}x = 18000$, oder $40x - 45x + 252x = 18000$, oder $247x = 18000$.

Diese Zahl aber, welche durch alle Theiler kann getheilet werden, zu finden, darf man nur nach und nach diese Theiler, einen durch den andern, vermehren. Wenn man z. E. $\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$ hat, und man will die Theiler daraus wegschaffen, so vermehre ich erst 3 durch 5, hernach vermehre ich ihr Product 15 durch 7. Daraus bekomme ich 105, als diejenige Zahl, welche sich durch 3, 5, 7 theilen läßt. Wenn ich diese Zahl gefunden habe, so vermehre ich

die

die ganze Gleichung damit, und da bekomme ich $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$, oder $245x + 21x = 16800 - 30x$.

Diese Rechnung noch mehr zu verkürzen, kann man, an statt die 105 aus der Vermehrung der drey Theiler herauszubringen, sich begnügen, dieses Product also zu schreiben, $3 \times 5 \times 7$. Durch die Vermehrung bekömmt man hernach $\frac{7 \times 3 \times 5 \times 7x}{3} + \frac{7 \times 3 \times 5x}{5} = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2x}{7}$. Hier sieht man alsbald, daß die Zahl 3 sich mit dem Zähler in dem ersten Bruche aufhebt, weil die Theilung durch 3 wegfallen muß, wenn man mit 3 vermehret. Und eben so geht es mit der 5 und der 7, welche zugleich in den Zählern und Theilern der andern Brüche sind.

Hierdurch gelangt man zu der Gleichung $7 \times 5 \times 7x + 7 \times 3x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 \times 5x$, welches, wenn man wirklich die durch die Zeichen $\times$ angezeigten Vermehrungen anstellet, die Gleichung $245x + 21x = 16800 - 30x$ giebt, worinne kein Bruch mehr ist.

XIX.

Damit wir auf die möglichst wahrscheinliche Art der Ordnung der Erfinder folgen mögen, so wollen wir uns itzo nicht dabey aufhalten, die Art, wie man die unbekannte Größe allein bekömmt, ferner zu untersuchen, sondern wir wollen wieder zurück auf die Art und Weise gehen, wie man die Aufgaben in Gleichungen bringet. Die Auflösung der Gleichungen

hat, unabhängig von den dazu gehörigen Aufgaben, die Algebraisten beschäfftigen können, nachdem schon diese Wissenschaft zu einem gewissen Grade gelanget war. Aber es ist zu vermuthen, daß diejenigen, welche den Grund gelegt haben, die Gleichungen nur bey Gelegenheit der Aufgaben untersucht haben, derer Entwickelung sie, so zu sagen, waren. Ausser dem finden sich zuweilen in den Gleichungen Verwickelungen, welche man nicht vermuthet hätte, wenn sie nicht die Natur der Aufgaben, welche man suchte, mit sich gebracht hätte. Wir können hier nichts deutlichers von der allgemeinen Art sagen, wie man die Aufgaben in Gleichungen bringt, als das, was wir im 8. §. gesagt haben. Aber wir wollen einige Exempel geben, welche den Anfängern diese Untersuchung geläufig machen werden.

Dritte Aufgabe.

Es soll einer eine gewisse Anzahl Arbeiter, jeden mit 3 Thl. bezahlen, und es fehlen ihm 8 Thl. Wenn er aber einem jeden 2 Thl. giebt, so behält er 3 Thl. übrig. Man fragt, wieviel er Geld hat?

Man bedienet sich in der Algebra wie in der Rechenkunst eines Querstrichs, die Theilung anzuzeigen.

Es sey x die Anzahl der Thaler, welche diese Person hat. $x + 8$ ist also die Summe, welche für alle Arbeiter zureicht, wenn jeder 3 Thaler bekömmt; und da die Anzahl der Arbeiter dreymal kleiner seyn muß, als die Zahl, welche diese Summe ausdrückt, so wird man sie durch das Drittel von $x + 8$ ausdrücken müssen, welches man also schreibt, $\frac{x+8}{3}$; denn in der Algebra zeigt allemal, wie in der Rechenkunst, ein

ein Querstrich die Theilung der obern Größe durch die untere an.

Ferner, weil 3 Thaler übrig bleiben, wenn jeder Arbeiter nicht mehr als 2 Thaler bekommt, so ist $x - 3$ eine hinlängliche Summe zu Bezahlung aller dieser Arbeiter, so, daß jeder 2 Thaler bekomme. $\frac{x-3}{2}$ kann also die Anzahl der Arbeiter ausdrücken. Weil wir aber zween Werthe von einerley Zahl haben, so müssen sie einander gleich seyn. Die Aufgabe ist also zur Auflösung der Gleichung $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$ gebracht.

Diese Gleichung aufzulösen, wollen wir mit Wegschaffung des Theilers 2 aus der Hälfte $\frac{x-3}{2}$ den Anfang machen, indem wir die andere Hälfte durch eben diese Zahl 2 vermehren. Hierdurch wird diese Gleichung in folgende Gleichung, $x - 3 = \frac{2x+16}{3}$, verwandelt werden. Denn es ist klar, daß das doppelte von $\frac{x-3}{2}$ ist $x-3$, und daß das doppelte von $\frac{x+8}{3}$ seyn wird $\frac{2x+16}{3}$ aus eben der Ursache, aus welcher $2x+16$ das Doppelte von $x+8$ ist. Hernach muß man den Theiler 3 aus der Gleichung $\frac{2x+16}{3} = x - 3$ wegschaffen, indem man die andere Hälfte durch 3 vermehret, und diese 3 in der ersten Hälfte wegläßt. Hieraus bekömmt man die Gleichung $2x+16 = 3x - 9$, oder $x = 25$.

Will man nun wissen, wie viel Arbeiter sind, so muß man eine von den beyden Ausdrückun-

gen $\frac{x-3}{2}$ und $\frac{x+8}{3}$, welche man für diese Zahl gefunden hat, z. E. $\frac{x-3}{2}$, nehmen. Weil man nun weis, daß $x = 25$, so wird $x - 3$ folglich 22 seyn. Also wird $\frac{x-3}{2} = \frac{22}{2} = 11$ die Zahl der Arbeiter seyn.

XX.

Bey der Gleichung $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$ muß ich anmerken, daß es bey derselben nicht erlaubt seyn würde, die Regel aus dem 11. §. anzuwenden, und die Größen -3 und $+8$ der Stelle und dem Zeichen nach mit einander zu verwechseln, und die Gleichung also zu schreiben $\frac{x-8}{2} = \frac{x+3}{3}$: weil die Zahl -3 nicht eigentlich ein Glied der ersten Hälfte ist, sondern nur ein Glied ihrer zu theilenden Größe $x - 3$; denn die Größe $\frac{x-3}{2}$ ist in der That nur ein einzig Glied der Gleichung, wie auch $\frac{x+8}{3}$. Wenn man also die Regel aus dem 11. §. anwenden wollte, so müßte man erst die Hälfte von $x - 3$, wie solches durch die Zahl 2, die unter dem ersten Querstriche steht, angezeiget worden, nehmen, woraus man denn $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ bekäme; hernach müßte man, wegen der 3, welche unter dem andern Querstriche steht, das Drittel von $x + 8$ nehmen, welches $\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ seyn würde; und wenn man endlich diese beyden Größen einander gleich machte, so würde man die Gleichung $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ bekommen, in welcher man die Versetzungen nach Gefallen vornehmen könnte.

XXI.

Die vorhergehende Aufgabe könnte auch noch auf folgende Art aufgelöset werden. Eine andere Auflösung eben derselben Aufgabe.

Es sey y die Zahl der Arbeiter, so wird $3y$ das Geld seyn, welches er ihnen zahlen muß, wenn jeder 3 Thaler bekömmt. Aber es fehlen ihm 8 Thaler zu Auszahlung dieser Summe; folglich ist $3y - 8$ das Geld, welches derjenige hat, der die Arbeiter bezahlen soll.

Ferner würde $2y$ die Summe seyn, welche er den Arbeitern, wenn jeder 2 Thl. bekäme, auszahlen müßte, und in diesem Falle würde er 3 Thl. übrig behalten. Es ist also $2y + 3$ ein anderer Ausdruck des Geldes, welches derjenige besitzet, der die Arbeiter bezahlen soll.

Man muß also die beyden Grössen $2y + 3$ und $3y - 8$ einander gleich setzen, oder, welches einerley ist, man muß die Gleichung $2y + 3 = 3y - 8$ auflösen, damit man den Werth von y erhalte. Wenn diese Gleichung nach den vorhergehenden Grundsätzen ist aufgelöset worden, welches sehr leicht ist, so wird man 11 für y, das ist, für die gesuchte Zahl der Arbeiter, bekommen.

XXII.

Ein Bote, welcher in 2 Stunden 5 Meilen geht, ist vor 9 Stunden von einem Orte abgegangen. Man schickt ihm einen andern Boten nach, dessen Geschwindigkeit so groß ist, daß er in 3 Stunden 11 Meilen geht. Nun will man wissen, wo der zweyte Bote den ersten antreffen wird? Vierte Aufgabe.

Es sey x der Weg, welchen der zweyte Bote zurücklegt, ehe er den ersten antrifft: so ist of-

 fenbar,

fenbar, daß dieser Weg gleich seyn muß dem Wege, welchen der erste Bote, in den 9 Stunden, welche er voraus hatte, zurückgeleget, und dem Wege, welchen eben der erste Bote in der Zeit, da der zweyte gegangen ist, zurückgeleget hat. Damit man nun anfangs den Weg finde, welchen der erste Bote in 9 Stunden zurückgelegt hat, so muß man folgende Proportion *oder Regel Detri machen:

Wie sich 2 Stunden verhalten zu 5 Meilen, so verhalten sich 9 Stunden zu einem 4ten Gliede, welches man, nach den bekannten Regeln der Rechenkunst findet, wenn man 5, das zweyte Glied der Proportion, durch das dritte, 9, vermehret, und das, was herauskömmt, durch das erste Glied, 2, theilet. Dieses vierte Glied wird also $\frac{45}{2}$ seyn, die Zahl der Meilen, welche der erste Bote in 9 Stunden zurückgeleget hat.

Wie man die Verhältnisse in der Algebra ausdrückt.

Aber da man in der Algebra seine Rechnung allezeit so kurz, als möglich, schreiben will, so drückt man diese Proportion folgendermaßen aus:

Stunden.		Meilen.		Stunden.		Meilen.
2	:	5	=	9	:	$\frac{45}{2}$

Von den Zeichen : dienet das eine, 2 mit 5, und das andere, 9 mit $\frac{45}{2}$ zu vergleichen, und das Zeichen = zeigt die Gleichheit an, welche zwischen

* Ich setze hier voraus, daß man entweder in meinen Anfangsgründen der Geometrie den 9. 10. ꝛc. §. §. in dem zweyten Theile gelesen habe, wo von den Verhältnissen gehandelt wird, oder daß man wenigstens die Regel Detri, welche in allen Rechenbüchern erkläret ist, wohl verstehe.

zwischen der Verhältniß 2 zu 5 und der Verhältniß 9 zu $\frac{45}{2}$ ist.

Damit man hernach auch den Weg finde, welchen eben dieser Bote in der Zeit zurücklegt, da der zweyte Bote den Weg x zurücklegt, so muß man erstlich die Zeit suchen, welche der zweyte Bote braucht, den Weg x zurückzulegen, welche man durch diese Proportion findet:

Meilen.		Stunden.		Meilen.		Stunden.
11	:	3	=	x	:	$\frac{3x}{11}$

In dieser Proportion siehet man, ohne sich um die in x enthaltene Anzahl der Meilen zu bekümmern, daß es genug ist, diese Zahl durch 3 zu vermehren, und das herausgebrachte durch 11 zu theilen, damit man die Zahl der Stunden bekomme, welche der zweyte Bote braucht, diesen Weg zurückzulegen.

Ohne also darauf zu sehen, ob die durch $\frac{3}{11}x$ ausgedrückte Anzahl der Stunden bekannt ist, oder nicht, muß man nun folgende Proportion machen:

Stunden.		Meilen.		Stunden.		Meilen.
2	:	5	=	$\frac{3}{11}x$	:	$\frac{15}{22}x$

Das vierte Glied $\frac{15}{22}x$ drückt also den Weg des ersten Botens aus, welchen er in der Zeit $\frac{3}{11}x$, das ist, ehe ihn der andere eingeholet, zurückgeleget hat.

So hat man einerley Größe auf zwo verschiedene Arten ausgedrückt. Denn der Weg des zweyten Botens wird erstlich durch x ausgedrückt,

gedrückt, und hernach ist er auch die Summe der $\frac{45}{2}$ Meilen, welche der erste Bote vor ihm voraus hatte, und der $\frac{15}{22}x$, welche eben dieser erste Bote zurückgelegt hatte, bis ihn der andere eingeholet. Wenn man also diese beyden Ausdrücke einander gleich setzet, so bekömmt man $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x$, welches, nach den vorhergehenden Regeln, $x = 70 + \frac{5}{7}$ giebt.

XXIII.

Wenn der erste Bote ausser dem Vortheile, daß er eher abgereiset ist, auch noch diesen hätte, daß er von einem weiter vorwärts gelegenen Orte abgereiset wäre, so würde die Frage dadurch zwar verwickelter werden, aber leicht auf eben dieselben Grundsätze zu bringen seyn.

Gesetzt, der erste Bote wäre z. E. nach Spanien abgegangen, und Montags Abends um 8 Uhr von Orleans ausgereiset, und er legte in 3 Stunden 7 Meilen zurück, der andere Bote aber wäre nach dem ersten Dienstags vormittage um 10 Uhr von Paris, dessen Entfernung von Orleans wir 34 Meilen setzen wollen, ausgereiset, und legte in 4 Stunden 13 Meilen zurück: so ist die Frage, wo sie einander angetroffen haben?

Diese Frage aufzulösen, muß man den Unterschied zwischen 8 Uhr Abends und 10 Uhr vormittage nehmen, welcher 14 Stunden ist; und da der erste Bote in 3 Stunden 7 Meilen zurücklegt, so bekömmt man folgende Proportion:

Stunden.

Stunden. Meilen. Stunden. Meilen.

$3 : 7 = 14 : \frac{98}{3}$, welche, wenn man sie zu den 34 Meilen, die der erste Bote voraus hat, hinzusetzt, $34 + \frac{98}{3}$ oder $\frac{200}{3}$ Meilen geben, um welche der erste Bote von Paris entfernet ist, in dem Augenblicke, da der zweyte abreiset. Hernach muß man, wie oben, diese Proportion machen:

Meilen. Stunden. Meilen. Stunden.

$13 : 4 = x : \frac{4}{13}x$, welches die Anzahl der Stunden ist, die der zweyte Bote braucht, den Weg x zurückzulegen.

Aber während eben dieser Anzahl Stunden wird der erste Bote einen Weg zurückgeleget haben, welchen man also findet:

Stunden. Meilen. Stunden. Meilen.

$3 : 7 = \frac{4}{13}x : \frac{28}{39}x$

Man bekömmt also die Gleichung $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$; woraus man, nach den oben erklärten Regeln, bekömmt $x = 236 + \frac{4}{11}$, welches der Weg ist, den der zweyte Bote zurückgelegt hat, bis er den ersten eingeholet.

XXIV.

Nachdem die ersten Algebraisten die Auflösung einer Aufgabe, woran ihnen gelegen war, gefunden hatten, so haben sie vermuthlich verschiedene Anwendungen davon gemacht, indem sie für die gegebenen Zahlen in diesen Aufgaben andere gesetzt haben. Sie werden z. E. die vorherge-

hergehende Aufgabe etliche mal so wiederholet haben, daß sie darinne die Verhältnisse der Geschwindigkeiten der Boten und den Unterschied der Zeit ihrer Abreisen verändert. Bey diesen verschiedenen Anwendungen haben sie gemerket, daß man einen Theil der Rechnung bey jedem besondern Exempel eben derselben Aufgabe wiederholen muß, und daß man diese Arbeit einmal für allemal verrichten könnte, wenn man eine Auflösung suchte, bey der man sich nicht an diese oder jene besondere Zahl bände, sondern die allgemein wäre, und sich für eine jede gegebene Zahl schickte. Damit wir zeigen, was sie sich zu diesem Ende ausgedacht haben, wollen wir die vorhergehende Aufgabe wieder vornehmen, und sie so allgemein ausführen, als es uns möglich seyn wird.

Allgemeine Auflösung der vorhergehenden Aufgabe.

Man drücke die Entfernung beyder Boten aus durch den Buchstaben . . . . a
Man kann aus diesem a eine Anzahl Meilen machen, was für eine man will, wenn die Auflösung der Aufgabe wird zu Ende gebracht seyn.

Hernach drücke man die Anzahl der Stunden, um welche der erste Bote eher ausgereiset ist, als der zweyte, aus durch den Buchstaben ...... b

Die Geschwindigkeit des ersten Boten sey so groß, daß er in . . . . d
Stunden c
Meilen zurücklege.

Die Geschwindigkeit des zweyten Botens sey so groß, daß er in . . . . f

Stun-

Stunden . . . . e
Meilen zurücklege.

Endlich sey, wie in der besondern Auflösung, der Weg, welchen der zweyte Bote zurücklegen muß, bis er den ersten einholet x

Man bedienet sich gemeiniglich in der Algebra der ersten Buchstaben des Alphabeths a, b, c, rc. die bekannten Größen, und der letzten s, t, u, x, rc. die gesuchten Größen auszudrücken.

Man bedient sich der ersten Buchstaben des Alphabeths, das Bekannte, und der letzten, das Unbekannte auszudrücken.

Damit man nun, nach dem Beyspiele der in dem vorhergehenden Exempel beobachteten Methode, den Weg finde, welchen der erste Bote in der Anzahl der Stunden b zurückgeleget hat, so muß man das vierte Glied einer Proportion suchen, deren erstes Glied die Anzahl der Stunden d, das zweyte die Anzahl der Meilen c, das dritte die Anzahl der Stunden b seyn muß. Es ist klar, daß man dieses eben so verrichten wird, wie in allen andern Regeln Detri, indem man das zweyte und dritte Glied durch einander vermehret und das herausgebrachte durch das erste Glied theilet.

Was die Art anlangt, das Product dieser Glieder auszudrücken, welche nicht mehr, wie vorhin, Ziffern, sondern Buchstaben sind, mit welchen man alle und jede Zahlen vorstellen kann, so hat man diese Art für die leichteste erachtet, daß die Buchstaben, welche man durch einander vermehren will, nur neben einander hin gesetzet werden. In Ansehung der Theilung haben wir schon gesehen, daß man in der Algebra eben so, wie in der Rechenkunst, einen Querstrich zwi-

Wenn Buchstaben ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen auf einander folgen, so zeigt dieses an, daß sie durch einander sollen vermehret werden.

schen die Größen macht, welche man theilen will.

Auf diese Art wird die vorhergehende Proportion also geschrieben

$$d : c = b : \frac{bc}{d}$$

Da man nunmehr $\frac{bc}{d}$ hat, womit man den Weg ausdrückt, welchen der erste Bote zurückgelegt hat, ehe der zweyte abgereiset ist, so bekömmt man, wenn man zu diesem Wege die Entfernung a beyder von einander hinzusetzt, den Weg, welchen der erste, bis zu dem Augenblicke der Abreise des andern, vorausgegangen ist, $a + \frac{bc}{d}$.

Damit wir nunmehr den Weg finden, welchen der erste Bote indessen zurücklegt, da ihm der andere nachreiset, so wollen wir, wie vorhin, damit den Anfang machen, daß wir die Zeit suchen, welche der zweyte Bote braucht, den Raum x zu durchreisen. Dieses wird durch Hülfe einer Proportion $e : f = x : \frac{fx}{e}$ geschehen, deren erstes Glied die Zahl der Meilen e, das zweyte die Zahl der Stunden f, das dritte die Zahl der Meilen x und das vierte $\frac{fx}{e}$, die gesuchte Zeit seyn wird.

Die Anzahl der Stunden $\frac{fx}{e}$, welche der zweyte Bote gebraucht hat, den ersten einzuholen, mag nun seyn, so groß sie will, so weis man, daß, wenn man eine Proportion macht, deren

drey

drey erste Glieder sind erstlich die Zahl der Stunden d, zweytens die Zahl der Meilen c, drittens die vorhergehende Zahl $\frac{fx}{e}$, das vierte Glied der Weg seyn wird, welchen der erste Bote in der Zeit zurückgeleget, da der zweyte Bote den Weg x zurückgeleget hat.

Diese Proportion schreibt man also: $d : c = \frac{fx}{e} : \frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$, worinne das letzte Glied die Zahl der Meilen ist, welche der erste Bote durchgereiset ist, indem der zweyte den Weg x zurückgeleget hat.

Aber wenn man diesen Weg des ersten Botens zu dem Wege $a + \frac{bc}{d}$, welchen er voraus hatte, hinzusetzt, so muß er dem Wege des zweyten Botens gleich werden.

Man bekömmt also die Gleichung $x = a + \frac{bc}{a} + \frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$

Wenn man sich erinnert, was wir oben mit den Brüchen vorgenommen haben, so wird man wissen, daß, wenn man einen Bruch z. E. $\frac{6}{3}$ durch 4 vermehren will, man den Zähler * vermehren,

* Man wird in der Rechenkunst gelernet haben, daß der Zähler eines Bruchs diejenige Zahl ist, welche über dem Querstriche steht, und welche die zu theilende Zahl ist. Ferner wird man wissen, daß diejenige Zahl der Nenner heißt, welche unter dem Querstriche steht, und welche der Theiler ist. Die arithmetischen Verrichtungen, welche ich hier und an allen Orten dieses Werks voraussetze, sind in verschiedenen Büchern

mehren, und schreiben muß $\frac{6\times 4}{3}$ oder $\frac{24}{3}$. Eben so muß man, wenn man $\frac{f\,x}{e}$ durch c

ver-

deutlich genug erkläret. Damit ich indessen den Lesern die Mühe ersparen möge, dieselben nachzuschlagen, so will ich mit wenigem diese Verrichtungen und die Ursache, auf welche sie gegründet sind, wiederholen.

Wenn man einen Bruch, z. E. $\frac{5}{7}$, durch 8 vermehren will, so vermehret man den Zähler 5 durch 8, und schreibt eben denselben Theiler 7 unter das herausgebrachte 40, welches $\frac{40}{7}$ giebt. Die Ursache davon ist klar. Den 8 mal 5 Siebentheile müssen 40 Siebentheile machen, wie das fünffache einer jeden Größe, 8 mal genommen, 40 solche Größen ausmacht.

Wenn man $\frac{3}{5}$ durch 4 theilen will, so muß man unter den Zähler 3 das Product 20 aus 4 durch den Nenner 5 setzen, welches $\frac{3}{20}$ giebt. Die Ursache davon ist diese, weil, wenn 1 Fünftheil 1 Zwanzigtheil wird, indem man es durch 4 theilet, 3 Fünftheile durch eben diese Theilung 3 Zwanzigtheile werden müssen.

Wenn man $\frac{5}{7}$ durch $\frac{8}{3}$ vermehren will, so vermehret man die Zähler 5 und 8 durch einander, und theilet das herausgebrachte 40 durch das Product 21 der Nenner 3 und 7, welches $\frac{40}{21}$ giebt. Diese Verrichtung gründet sich darauf, daß das Product von $\frac{8}{3}$ durch $\frac{5}{7}$ 3 mal kleiner seyn muß als das Product von 8 durch $\frac{5}{7}$. Aber 8 durch $\frac{5}{7}$ hat $\frac{40}{7}$ gegeben: folglich muß $\frac{8}{3}$ durch $\frac{5}{7}$ das Drittel davon geben, das ist, $\frac{40}{21}$.

vermehren will, c durch fx vermehren, und den Theiler e stehen lassen, welches $\frac{cfx}{e}$ anstatt $c \times \frac{fx}{e}$ giebt. Man weis ferner, daß, wenn man einen Bruch, z. E. $\frac{5}{3}$ durch eine jede Zahl, z. E. 6, theilen will, man den Nenner 3 durch diese Zahl 6 vermehren muß, welches $\frac{5}{3 \times 6}$ oder $\frac{5}{18}$ giebt. Eben so muß man, wenn man den Bruch $\frac{cfx}{e}$ durch d theilen will, schreiben $\frac{cfx}{de}$.

Wenn man nun also den vorhergehenden Ausdruck $\frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$ in $\frac{cfx}{de}$ verwandelt hat, so ist die aufzulösende Gleichung folgende $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$. Hier muß man nun, wie in dem XVIII. §. ist gezeigt worden, damit den Anfang machen, daß man alle Glieder, ausgenommen das letzte, durch den Theiler de vermehret, damit man ihn aus dem letzten Gliede wegbringe.

Endlich wenn man $\frac{3}{5}$ durch $\frac{4}{11}$ theilen will, so muß man den Zähler 3 des ersten Bruches durch den Nenner 11 des zweyten Bruches vermehren, und das Herausgebrachte 33 durch das Product 20 des Nenners 5 des ersten Bruches und des Zählers 4 des zweyten Bruches theilen, welches $\frac{33}{20}$ giebt. Hiervon sieht man die Ursache, wenn man bemerket, daß $\frac{3}{5}$ durch 4 getheilet $\frac{3}{20}$ geben würden, und daß $\frac{3}{5}$ durch $\frac{4}{11}$ getheilet, welche 11 mal kleiner sind, als 4, einen Quotienten geben müssen, welcher 11 mal größer ist, das ist $\frac{33}{20}$.

Hierdurch bekömmt man folgendes $dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$, oder $dex = ade + bce + cfx$, weil $\frac{bcde}{d}$ eben so viel ist, als bce; denn die Größe bce bleibt eben dieselbe, wenn man sie zugleich durch d vermehret und theilet.

Wenn man das Glied cfx in die erste Hälfte bringt, so bekömmt man $dex - cfx = ade + bce$.

Damit wir nun das x in dieser Gleichung finden, so wollen wir überlegen, daß, wenn wir die Zahlen de und cf, welche anzeigen, wie vielmal das x in den Gliedern dex und cfx steckt, wüßten, wir die zweyte von der ersten abziehen würden, und daß wir den Rest, welcher anzeigte, wieviel x in der ersten Hälfte der Gleichung enthalten sind, zum Theiler der andern Hälfte machen würden, um den Werth von x zu bekommen. Nun aber ist, ohne die Zahlen de und cf zu wissen, klar, daß $de - cf$ ihren Unterschied, und folglich die Menge von x ausdrückt, welche in der ersten Hälfte der Gleichung $dex - cfx = ade + bce$ enthalten ist. Folglich ist der Werth von x das, was herauskömmt, wenn die andere Hälfte durch diese Zahl $de - cf$ getheilet wird. Also ist $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$; und dieses ist die allgemeine Auflösung der vorhergehenden Aufgabe. Denn wenn man itzt weis, was a, b, c, d, e, f, gelten, so hat man weiter nichts zu thun, als sich dieser Werthe auf die Art zu bedienen, wie es dieser allgemeine Werth von x anzeigt; das ist, man

muß

muß *a*, *d*, *e*, nach und nach durch einander vermehren, zu dem, was herauskömmt, das hinzusetzen, was herauskömmt, wenn man *b*, *c*, *e*, durch einander vermehret, und die Summe dieser beyden durch die Vermehrung herausgebrachten Zahlen durch die Zahl theilen, welche der Unterschied zwischen dem Producte aus *d* durch *e*, und dem Producte aus *c* durch *f*, ist; und so wird man diese Aufgabe auf jede beliebige besondere Art auflösen können.

XXV.

Anwendung der vorhergehenden Auflösung auf Zahlen.

Wir wollen z. E. wie im XXIII. §. setzen, die Entfernung beyder Boten von einander betrüge 34 Meilen; der erste Bote sey 14 Stunden eher, als der zweyte, ausgegangen, und gehe 7 Meilen in 3 Stunden, und der zweyte gehe 13 Meilen in 4 Stunden, so wird man haben

$a = 34, b = 14, c = 7$

$d = 3, e = 13, f = 4$

welche Zahlen geben werden

$ade = 34 \times 3 \times 13$, das ist

$= 102 \times 13 = 1326$,

$bce = 14 \times 7 \times 13 = 1274$,

und folglich ist $ade + bce = 2600$, $de = 39$, $cf = 28$, und also $de - cf = 11$. Hieraus wird man bekommen

$x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$, wie es im XXIII. §. gefunden worden.

Eine andere Anwendung.

Wenn man hernach aus der allgemeinen Auflösung den ersten im XXII. §. berechneten Fall ziehen will, da man setzete, daß die beyden

Boten von einerley Orte ausgegangen wären, daß der erste 9 Stunden voraus gehabt und 5 Meilen in 2 Stunden, der andere aber 11 Meilen in 3 Stunden zurückgelegt hätte, so wird man in diesem Falle haben

$$a=0, b=9, c=5,$$
$$d=2, e=11, f=3.$$

Und wenn man diese Werthe in der allgemeinen Formul an die Stelle des Werths von x setzet, so bekömmt man $x=\frac{9\times5\times11}{2\times11-5\times3}=\frac{495}{7}=70+\frac{5}{7}$, so wie man es im XXII. §. gefunden hat. Auf diese Art kann man in allen andern beliebigen Anwendungen verfahren.

XXVI.

Sobald man erst die Art und Weise entdecket hat, eine Aufgabe allgemein zu machen, indem man statt der Zahlen Buchstaben gebraucht, so hat man fast allezeit die Aufgaben auf das allgemeinste vorgetragen. Man muß also die Anfänger gewöhnen, auf diese Art damit umzugehen. In dieser Absicht wollen wir itzo folgende Aufgabe auflösen.

Fünfte Aufgabe. Ein Handwerksmann kann eine gewisse durch a ausgedrückte Arbeit in einer durch b ausgedrückten Zeit verfertigen. Ein zweyter Handwerksmann verfertiget die Arbeit c in der Zeit d, und ein dritter Handwerksmann verfertiget die Arbeit e in der Zeit f. Man fragt, wieviel Zeit diese drey Handwerksleute brauchen, wenn sie alle zusammen arbeiten, um die Arbeit g zu Stande zu bringen?

Es

Es sey x die gesuchte Zeit, so wird man die Arbeit bekommen, welche der erste in dieser Zeit verfertiget, wenn man folgende Proportion macht:

$$b:a=x:\frac{ax}{b}$$

Die Arbeit, welche der zweyte Handwerksmann in eben dieser Zeit macht, wird man durch folgende Proportion bekommen:

$$d:c=x:\frac{cx}{d}$$

Endlich wird man die Arbeit bekommen, welche der dritte Handwerksmann in eben dieser Zeit verfertiget, wenn man folgende Proportion macht:

$$f:e=x:\frac{ex}{f}.$$

Also ist $\frac{ex}{f}+\frac{cx}{d}+\frac{ax}{b}$ die Arbeit der drey zusammen arbeitenden Handwerksleute, welche sie in der gesuchten Zeit verfertigen. Aber diese Arbeit muß gleich seyn g. Man bekömmt also die Gleichung $\frac{ex}{f}+\frac{cx}{d}+\frac{ax}{b}=g$.

Diese Gleichung aufzulösen, muß man, nach den Regeln des XVIII. §. die ganze Gleichung durch das Product fdb der Theiler vermehren, so bekömmt man $\frac{edfbx}{f}+\frac{cdbfx}{d}+\frac{afdbx}{b}=bdfg$, woraus $edbx+fcbx+adfx=fbdg$ wird. Wenn man nun überlegt, daß $edb+fcb+adf$ anzeigen muß, wie vielmal x in der einen Hälfte enthalten ist, so bekömmt man $x=\frac{bdfg}{bde+bcf+adf}$.

XXVII.

Exempel in Zahlen.

Von dieser Aufgabe eine Anwendung zu machen, so wollen wir setzen, daß ein Maurer 7 Fuß von einer Mauer in 5 Tagen, ein zweyter Maurer 10 Fuß in 3 Tagen, und ein Dritter 11 Fuß in 4 Tagen habe verfertigen können. Man fragt, wieviel Zeit diese 3 Maurer, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten, brauchen, um 150 Fuß von eben dieser Mauer zu verfertigen?

Man bekömmt durch diese Voraussetzungen

$$a=7;\ b=5;\ c=10;\ d=3;\ e=11;$$
$$f=4;\ g=150;$$

und folglich $bdfg=5\times3\times4\times150=9000$; $bde=5\times3\times11=165$; $bcf=5\times10\times4=200$; $adf=7\times3\times4=84$. Hieraus erhält man zum Werthe von x, $\frac{9000}{449}$ oder $20+\frac{20}{449}$, die Zahl der Tage, in welchen die Arbeit wird verrichtet werden.

XXVIII.

Ein anderer Exempel.

Nun wollen wir setzen, es sey die Frage, in wieviel Zeit ein Wasserbehältniß von 200 Cubicschuhen von 3 Röhren voll werden werde, wovon die erste 9 Cubicschuh in $2\frac{1}{2}$ Tagen, die zweyte 15 Cubicschuh in $3\frac{1}{3}$ Tagen, und die dritte 19 Cubicschuh in $5\frac{1}{4}$ Tagen füllen könnte; wo $a=9$, $b=2\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{2}$, $c=15$, $d=3\frac{1}{3}$ oder $\frac{10}{3}$, $e=19$, $f=5\frac{1}{4}$ oder $\frac{21}{4}$, $g=200$.

Wenn man für die Buchstaben ihre Werthe hersetzt, so bekömmt man . . . .

$x=$

$$x = \frac{\frac{5}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{21}{4}\times 200}{\frac{5}{2}\times\frac{10}{3}\times 19+\frac{5}{2}\times 15\times\frac{21}{4}+9\times\frac{10}{3}\times\frac{21}{4}}.$$

Hieraus wird $\dfrac{\frac{210000}{2\times3\times4}}{\frac{950}{2\times3}+\frac{1575}{2\times4}+\frac{1890}{3\times4}}.$

Diese Größe kurz auszudrücken, vermehre ich den Zähler und den Nenner des ersten Bruches des Theilers durch 4, den Zähler und den Nenner des zweyten durch 3, und den Zähler und den Nenner des dritten durch 2, wodurch die Größe also verwandelt wird:

$$\frac{\frac{210000}{2\times3\times4}}{\frac{3800}{2\times3\times4}+\frac{4725}{2\times3\times4}+\frac{3780}{2\times3\times4}},$$

oder so: $\dfrac{\frac{210000}{2\times3\times4}}{\frac{12305}{2\times3\times4}}$, oder so: $\dfrac{210000}{12305}$,

oder so: $17+\frac{163}{2461}$. Dieses ist die gesuchte Anzahl der Tage, in welchen das gegebene Wasserbehältniß voll werden wird, wenn man alle drey Röhren auf einmal laufen läßt.

XXIX.

Aus den beyden vorhergehenden Aufgaben erhellet, daß die im X. und folgenden §§. zu Auflösung der Zahlengleichungen, des ersten Grades gegebenen Regeln auch bey den Buchstabengleichungen angewendet werden können. Aber man sieht auch, daß diese Regeln zu kurz sind, als daß die

Die im X. und folgenden §§. gegebenen Regeln sind zu den Buchstabengleichungen hinlänglich.

die Anfänger nicht noch eine Anleitung in der Art, sie anzuwenden, nöthig haben sollten. Wir halten uns um desto mehr verbunden, ihnen durch eine große Menge solcher Anwendungen zu helfen, da es wahrscheinlich ist, daß man dergleichen Arbeiten viele sehr nützliche algebraische Operationen zu danken hat, welche wir, so zu sagen, im Fortgehen entdecken werden.

Aus der Anwendung dieser Regeln sind viele algebraische Operationen entsprungen.

Erstes Exempel von Auflösung der Buchstabengleichungen.

Man soll die Gleichung $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$ auflösen.

Ich fange damit an, daß ich die Glieder $3ac$ und $-5ab$ in die andere Hälfte der Gleichung bringe, indem ich ihre Zeichen verändere, welches mir $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$ giebt. Ich versetze gleichfalls das Glied $-ax$ in die andere Hälfte, indem ich eben auch dessen Zeichen verändere, welches mir $2ac + ab - 3ac + 5ab = 2ax - dx + ax$ giebt. Hierauf verkürze ich diese Gleichung, indem ich erstlich ab und $5ab$ zusammensetze, woraus ich also $6ab$ bekomme, zweytens anstatt der Glieder $2ac - 3ac$ setze $-ac$, und drittens anstatt $2ax + ax$ setze $3ax$. Auf diese Art wird aus der vorgegebenen Gleichung nunmehr diese: $6ab - ac = 3ax - dx$, welches giebt $x = \frac{6ab - ac}{3a - d}$.

XXX.

Zweytes Exempel von Auflösung der Buchstabengleichungen.

Es sey $5ab + 2ax - 3bd = 2ab - 5ax + 7bd - ac - dx$. Die Glieder $5ab - 3bd$ verwandelt man in $-5ab + 3bd$, indem man sie in die zweyte Hälfte versetzt, und aus

aus den Gliedern $-5ax-dx$ wird $+5ax+dx$, indem man sie in die erste Hälfte versetzt. Man wird also bekommen $2ax+5ax+dx=2ab+7bd-ac-5ab+3bd$, woraus verkürzt folgendes wird $7ax+dx=10bd-3ab-ac$, indem man $7ax$ anstatt $2ax+5ax$, $10bd$ anstatt $7bd+3bd$, und $-3ab$ anstatt $2ab-5ab$ setzt.

Wenn man nunmehr das x in dieser Gleichung von den andern Größen losmachet, so bekömmt man $x=\frac{10bd-ac-3ab}{7a+d}$.

XXXI.

Bey der Auflösung der beyden vorhergehenden Gleichungen ist nöthig gewesen, unterschiedene Glieder von einerley Art, als $2ac$ und $-3ac$; $5ab$ und ab ꝛc. in einen einfachern Ausdruck zu bringen. Da diese Verrichtung fast allezeit in den aufzulösenden Gleichungen und in den andern Theilen der Algebra nöthig ist, so müssen sich die Anfänger bemühen, dieses leicht zu bewerkstelligen. Um ihnen hierzu das Mittel an die Hand zu geben, will ich einige Exempel beybringen.

Abkürzung der Größen, oder deren Verwandlung in ihre einfachste Ausdrückung.

Man habe z. E. $15abc-13bcd-7abc+29bcd-5abf+9abc+6cbi$ zu verkürzen.

Erst muß man die Glieder $15abc$, $-7abc$ und $9abc$, welche von einerley Art sind, vornehmen, und die beyden Glieder $15abc$ und $9abc$, welche alle beyde positiv sind, das ist, welche das Zeichen $+$ haben, zusammensetzen. Hernach

Man nennet positive Glieder diejenigen

 muß

nigen, vor welchen ein +, und negative, diejenigen, vor welchen ein — steht.

muß man von ihrer Summe, welche 24 *abc* ist, das Glied 7 *abc* abziehen, weil es negativ ist, oder das Zeichen — vor demselben steht; wodurch denn aus den drey Gliedern 15 *abc* — 7 *abc* + 9 *abc* wird 17 *abc*. Auf eben diese Art schreibt man 16 *bcd* anstatt 29 *bcd* — 13 *bcd*. Die Glieder — 5 *abf* und + 6 *chi* aber, welche die einzigen in ihrer Art sind, schreibt man so hin, wie sie sind. Also wird die verkürzte Größe seyn 17 *abc* + 16 *bcd* — 5 *abf* + 6 *chi*.

Hat man die Größe $\frac{5}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{5}{7}ax$, so bekömmt man durch die Verkürzung $\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad$.

Die Größe 2 *acd* — 5 *acb* — 3 *acd* + 3 *acb* — 6 *bfi* wird durch die Verkürzung in folgende verwandelt — *acd* — 2 *acb* — 6 *bfi*, welche, weil sie ganz negativ ist, anzeigt, daß die Größe, welche man abkürzen wollte, mehr negatives, als positives, in sich hatte.

XXXII.

Die algebraische Zusammensetzung ist eben die vorhergehende Operation.

Bey dieser Gelegenheit muß ich erinnern, daß die Verkürzung, welche in den vorhergehenden Exempeln gelehret worden, vollkommen eben dieselbe Regel ist, welche man die Zusammensetzung nennet. Denn wenn man zwo Größen, sie seyn welche sie wollen, zusammensetzen will, so ist es genug, wenn man sie neben einander schreibt, und sie hernach in ihre einfachste Ausdrückung verwandelt. Wenn man z. E. die Größe 6 *ab* — 2 *ac* — 3 *ad* mit 3 *ab* + *ac* — 2 *ad* + *bf*

zusam-

zusammensetzen soll, so hat man nichts zu thun, als die Größe $6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf$ zu verkürzen, wodurch man also $9ab - ac - 5ad + bf$ zur Summe der beyden gegebenen Größen bekömmt.

Wenn man die beyden Größen $2ac - 3ad + af$ und $ad - 5ac - 2af$ zusammensetzen will, so kömmt es nur darauf an, daß man die Größe $2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af$ verkürzet. Nach geschehener Abkürzung wird $- 3ac - 2ad - af$ herauskommen. Man wird sich vielleicht anfangs wundern, daß einen die Zusammensetzung auf eine negative Größe führen kann. Aber man wird die Entwickelung dieser Schwierigkeit bald finden, wenn man bedenket, daß nothwendig entweder alle beyde Größen $2ac - 3ad + af$ und $ad - 5ac - 2af$ negativ seyn müssen, oder daß wenigstens eine von beyden negativ und größer seyn muß, als die andere.

Man wird dieses leichter wahrnehmen, wenn man einige Exempel in Zahlen macht. Wir wollen erstlich setzen, es sey $a = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $f = 5$. In diesem Falle werden wir anstatt $2ac - 3ad + af$ bekommen $12 - 24 + 10$, oder einfach ausgedrückt, $- 2$, und anstatt $ad - 5ac - 2af$ wird $8 - 30 - 20 = - 42$ herauskommen. Also wird die Summe dieser Größen seyn $- 44$, und man wird sich nicht wundern, daß dieser beyden negativen Größen ihre Summe negativ ist.

Nun

Nun wollen wir setzen, es sey $a=6$, $c=5$, $d=3$, $f=2$, so wird seyn: $2ac-3ad+af=18$, und $ad-5ac-2af=-156$. Da nun die zweyte Größe negativ und größer ist, als die erste, so muß die Summe negativ seyn.

XXXIII.

Wie man sagen kann, daß man eine negative Größe zu einer andern setze.

Man wird vielleicht fragen, ob man negatives zu positivem hinzusetzen kann? oder vielmehr, ob man sagen kann, daß man etwas negatives zusetze? Hierauf antworte ich, daß dieser Ausdruck richtig ist, wenn man nicht zusammensetzen und vergrößern miteinander vermengt. Wenn z. E. zwo Personen ihre Güter, sie mögen nun seyn, wie sie wollen, zusammenbringen, so sage ich, dieses heisse ihre Güter zusammensetzen. Wenn nun einer davon Schulden und wirkliche Güter hat, seine Schulden aber mehr sind, als seine Güter, so hat er nur etwas negatives, und die Zusammenbringung seiner Güter mit den Gütern des erstern verringert dessen Vermögen, so, daß die Summe entweder kleiner, als das, was der erste besaß, oder gar negativ seyn wird.

XXXIV.

Aus der vorhergehenden Operation folgt auch die algebraische Abziehung.

Aus der Verkürzung, welche in den beyden vorhergehenden §§. gelehret worden, entspringt auch noch eine andere algebraische Regel, nämlich die Abziehung. Denn z. E. wenn man in der Gleichung $2ac+ab-ax=3ac+2ax-5ab-dx$ (§. XXIX.) die Glieder $3ac-5ab$ mit veränderten Zeichen auf die andere Seite gesetzt, und die Gleichung $2ac+ab-$

ax

$ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$, oder $-ac + 6ab - ax = 2ax - dx$, bekommen hat, so sage ich, daß man die Größe $3ac - 5ab$ von der Größe $2ac + ab - ax$ abgezogen hat, und daß der Rest ist $-ac + 6ab - ax$. Denn da man $3ac - 5ab$ aus der andern Hälfte der Gleichung weggenommen, so hat man etwas von dieser Größe abgezogen. Damit nun aber die Gleichheit beybehalten werde, so muß man auch auf der andern Seite eben so viel abgezogen haben. Also ist $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ oder $-ac + 6ab - ax$ dasjenige, was von der Größe $2ac + ab - ax$ übrig bleibt, wenn man $3ac - 5ab$ davon weggenommen hat.

Wie das Abziehen geschieht.

Wenn man also zwo Größen hat, da die eine soll abgezogen werden, so muß man die Zeichen derjenigen Größe ändern, welche man abziehen will, dieselbe neben der andern Größe schreiben, und hernach den Ausdruck der Größen von einer Art verkürzen; welches man, ohne das, was gesagt worden, in Betrachtung zu ziehen, auf folgende Art beweisen könnte.

Gesetzt, man wollte von der Größe $2ac + ab - ax$ die Größe $3ac - 5ab$ abziehen. Es ist klar, daß, wenn man von der erstern Größe nur $3ac$ abziehen wollte, man schreiben müßte $2ac + ab - ax - 3ac$. Aber, indem man die Größe $3ac$ anstatt $3ac - 5ab$ abzieht, so zieht man eine um $5ab$ zu große Größe ab. Man muß also die $5ab$, um welche man, indem man $3ac$ abgezogen, zuviel abgezogen hat, wieder hinzusetzen.

zusetzen. Demnach muß man den Rest von $2ac + ab - ax$, nachdem man $3ac - 5ab$ davon abgezogen hat, also schreiben $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$.

Zur Uebung in dieser Regel, welche, wie man wohl merket, oft wird gebraucht werden müssen, will ich folgende Exempel beyfügen.

Wenn man von $5ab + 10fg - 3ac + 2de$ folgende Größe, $2ab - 5fg + 6ac + de$ abziehen soll, so wird $5ab + 10fg - 3ac + 2de - 2ab + 5fg - 6ac - de$, oder $3ab + 15fg - 9ac + de$ übrig bleiben.

Aus der Größe $6aeb + 3agh - 10bcd$ wird man, wenn man $abc - 10aeb - 8agh$ davon abzieht, bekommen $16aeb - abc - 10bcd + 11agh$.

Die Größe $3ac + ab + be$ giebt, wenn man die Größe $-ac - 3ab$ davon abzieht, $4ac + 4ab + be$.

XXXV.

Man vergrößert eine Größe, wenn man eine negative Größe davon abziehet.

Wenn man sich wundert, daß bey dieser Abziehung der Rest $4ac + 4ab + be$ größer ist, als die Größe $3ac + ab + be$, von welcher man $-ac - 3ab$ abziehen wollte, so wundert man sich nur darum, weil man abziehen und verkleinern miteinander vermenget. Denn wenn man gegentheils begreift, daß eine jegliche Größe, z. E. a, von einer andern b abziehen, so viel ist, als finden, um wieviel b größer ist, als a, so wird man es für sehr möglich halten, daß eine Größe durch eine Abziehung vergrößert werden kann.

Wenn

Wenn man z. E. fragt, um wieviel einer reicher ist, als der andere, wenn dieser letztere lauter Schulden hat, so wird man bald sehen, daß der Ueberfluß des Reichthums des erstern dasjenige ist, was er besitzt, nebst einer Summe, welche den Schulden des andern gleich ist.

XXXVI.

Dritter Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen.

Man soll nunmehr die Gleichung $\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$ auflösen. Damit man nun erstlich den Theiler $2a$ wegbringe, so braucht man ihn, nach dem XV. §. bey allen Gliedern der Gleichung zum Vermehrer, und da bekömmt man $cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2a \times x - \frac{4ad \times 2a}{3c}$. Aber es ist klar, daß man anstatt $ac \times 2a$ schreiben kann $2aac$, weil das Product von $2a$ durch ac das Doppelte von dem Producte von a durch ac, und das Product von a durch ac dem aac gleich seyn muß. Ebenfalls wird auch $2a \times x$ seyn $2ax$, und $4ad \times 2a$ wird seyn $8aad$. Denn das Product von ad durch a ist aad, und das Product von $4ad$ durch $2ad$ muß das Achtfache von dem Producte von ad durch a seyn.

Die Gleichung wird also in $cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ oder $cx - \frac{aac}{b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ verwandelt, weil $\frac{2aac}{2b}$ und $\frac{aac}{b}$ einerley ist. Vermehret man hernach alle Glieder dieser Gleichung durch b, so wird daraus $b \times cx - aac = 2ax \times b - \frac{8aad}{3c} \times b$, oder $bcx - aac$

$= 2abx$

$= 2abx - \frac{8aabd}{3c}$, welches ferner in $cbx \times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabd$, oder $3bccx - 3aacc = 6abcx - 8aabd$, verwandelt wird. Denn die Producte von c durch cbx, aac und $2abx$ würden $bccx$, $aacc$, $2abcx$ seyn, und folglich müssen die Producte von $3c$ durch eben dieselben Größen das Dreyfache, das ist, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$, seyn. Durch die Versetzung wird man nunmehr bekommen $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabd$, welches endlich $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$ giebt.

XXXVII.

Eine über einen Buchstaben und zur Rechten desselben gesetzte Ziffer zeigt an, daß er so vielmal durch die Vermehrung hätte wiederholet werden sollen.

In dem vorhergehenden Exempel ist durch die Vermehrung einiger Größen, welche einerley Buchstaben in sich enthielten, eine Wiederholung dieser Buchstaben in den herausgebrachten Größen entstanden. Da nun die Algebraisten sich allemal auf die kürzeste Art auszudrücken suchen, so haben sie eine Manier ersonnen, einen Buchstaben, der etlichemal hintereinander zu wiederholen wäre, nur einmal zu schreiben, indem sie über diesen Buchstaben, und zur Rechten desselben, eine Ziffer setzen, welche anzeigt, wie vielmal dieser Buchstabe wiederholet werden sollte. Demnach schreibt man, anstatt der vorhergehenden Ausdrückung,

$$x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$$

also; $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$.

Wenn

Wenn man bey einer Berechnung ein *aaa*, das ist, das Product von *aa* durch *a*, oder von *a* zweymal nach einander durch sich selbst vermehrt, nöthig hat, so setzt man schlechtweg a^3. Eben so setzt man c^4 anstatt *cccc*. Wenn ein Buchstabe auf diese Art wiederholet worden, oder vielmehr, wenn eine Ziffer anzeigt, daß er so vielmal hätte wiederholet werden sollen, so sagt man, daß er auf die durch die Ziffer ausgedrückte Potenz ist erhoben worden, und daß diese Ziffer sein Exponent ist. Also nennt man c^4, oder *cccc*, welches herausgebracht wird, wenn *c* dreymal nach einander durch sich selbst vermehret wird, ein zu der vierten Potenz erhobenes *c*, und 4 ist sein Exponent. Man muß sich wohl vorsehen, daß man nicht die Ziffern, welche zu Exponenten dienen, mit denen vermenge, welche zur Linken der Buchstaben und in einer Linie mit ihnen stehen. Diese werden Coefficienten genennet. In $4a^2c$ z. E. ist 4 der Coefficient des Gliedes, und 2 ist der Exponent von *a*.

Und in diesem Falle sagt man, daß der Buchstabe zu derjenigen Potenz erhoben worden, welche die Ziffer ausdrückt, die man den Exponenten nennet.

Die Ziffern, welche zur Linken und in eben derselben Linie stehen, werden Coefficienten genennet.

XXXVIII.

Es sey die Gleichung $\frac{2ab^2x}{3c^2d} + \frac{5ac^2}{b^2} = \frac{6cd^2}{a^2} - 3x$. Wenn man alle Glieder durch den Theiler $3c^2d$ vermehret, so bekömmt man $2ab^2x + \frac{5ac^2 \times 3c^2d}{b^2} = \frac{6cd^2 \times 3c^2d}{a^2} - 3x \times 3c^2d$.

Viertes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen.

Um nun hernach die durch die Zeichen × angezeigten Vermehrungen zu machen, wollen wir erstlich anmerken, daß ac^2 durch c^2d vermehret ac^4d geben muß. Denn wenn man anstatt a^2c und c^2d schriebe *acc* und *ccd*, wie man

es denn thun könnte, so würde man sogleich sehen, daß das Product von acc durch ccd seyn würde $accccd$, das ist, nach dem vorhergehenden §, ac^4d. Da nun ac^4d das Product von ac^2 durch c^2d ist, so ist klar, daß $15ac^4d$ das Product von $5ac^2$ durch $3c^2d$ seyn wird.

Eben so bringt man $18c^3d^3$ heraus, wenn man $6cd^2$ durch $3c^2d$ vermehret, und $9c^2dx$ bekömmt man, wenn man $3x$ durch $3c^2d$ vermehret. Die vorhergehende Gleichung wird also nunmehr in $2ab^2x + \frac{15ac^4d}{b^2} = \frac{18c^3d^3}{a^2} - 9c^2dx$ verwandelt seyn.

Vermehret man nun diese neue Gleichung durch b^2, so wird $2ab^4x + 15ac^4d = \frac{18b^2c^3d^3}{a^2} - 9b^2c^2dx$ daraus, und wenn man wiederum diese durch a^2 vermehret, so bekömmt man $2a^3b^4x + 15a^3c^4d = 18b^2c^3d^3 - 9b^2a^2c^2dx$, woraus endlich durch die Versetzung wird $2a^3b^4x + 9b^2a^2c^2dx = 18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d$, aus welchem letztern man endlich bekömmt $x = \frac{18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d}{2a^3b^4 + 9a^2b^2c^2d}$.

XXXIX.

Unverwickelte Größen sind diejenigen, welche nur ein Glied haben.

In den beyden vorhergehenden Aufgaben hat man müssen Größen vermehren können, welche durch ein einziges Glied, als $4ad$, $9c^2d$ rc. ausgedrücket werden, und welche man gemeiniglich unverwickelte (incomplexes) oder eingliederige Größen (monomes) nennet, und man hat zugleich gefunden, was man bey dieser Verrichtung

tung zu thun hat. Die allgemeine Methode, welche aus den Betrachtungen, die wir bey diesen besondern Exempeln gemacht haben, fließet, bestehet darinne, daß man erstlich die Coefficienten durch einander vermehret, hernach die Exponenten derer Buchstaben, welche einerley sind, zusammensetzt, und die von ihnen unterschiedenen Buchstaben daneben schreibt. Also ist, nach dieser Regel, $3a^5b^3d \times 7a^2bd^2 = 21a^7b^4d^3$; $\frac{2}{3}a^2cd \times \frac{2}{5}ac^3bd = \frac{18}{15}a^3c^4bd^2 = \frac{6}{5}a^3c^4bd^2$; $\frac{2}{3}ac^2de \times 9a^4fg = 6a^5c^2defg$.

Die Vermehrung der unverwickelten Größen wird aus den beyden vorhergehenden Exempeln hergeleitet.

XL.

Es sey die Gleichung $\frac{a^2c}{2b^2} + \frac{4cx}{3a} = \frac{5ab}{c} - 3a$. Wenn ich alle Glieder durch $2b^2$ vermehre, so bekomme ich $a^2c + \frac{8b^2cx}{3a} = \frac{10ab^3}{c} - 6ab^2$, und wenn ich ferner alle Glieder durch $3a$ vermehre, so bekomme ich $3a^3c + 8b^2cx = \frac{30a^2b^3}{c} - 18a^2b^2$, und wenn ich eben dieses thue, um den Theiler c wegzuschaffen, so kömmt $3a^3c^2 + 8b^2c^2x = 30a^2b^3 - 18a^2b^2c$ heraus; woraus man folgendes erhält $x = \frac{30a^2b^3 - 18a^2b^2c - 3a^3c^2}{8b^2c^2}$, welches man auch also schreiben kann $x = \frac{30a^2b^3}{8b^2c^2} - \frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2} - \frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$, weil $8b^2c^2$, da es die ganze Größe $30a^2b^3 - 18a^2b^2c - 3a^3c^2$ theilet, auch einen jeden Theil derselben theilet.

Fünftes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen.

Nun kann man aber den also geschriebenen Werth von x einfacher ausdrücken, wenn man

ein jedes Glied verkürzet. Denn erstlich kann man anstatt $\frac{30a^2b^3}{8b^2c^2}$ setzen $\frac{15a^2b}{4c^2}$, weil man den Zähler, als das Product aus $2b^2$ durch $15\ a^2b$, und den Nenner, als das Product aus eben dieser Größe $2b^2$ durch $4c^2$ betrachten kann; und wenn man also beyde durch einerley Größe $2b^2$ theilet, so kömmt $\frac{15a^2b}{4c^2}$ heraus. Zweytens kann man anstatt $\frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2}$ setzen $\frac{9a^2}{4c}$; denn der Zähler ist das Product von $2b^2c$ durch $9a^2$, und der Nenner ist das Product eben dieser Größe $2b^2c$ durch $4c$. Anstatt $\frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$ kann man setzen $\frac{3a^3}{8b^2}$. Also ist der abgekürzte Werth von x . . . . $\frac{15a^2b}{4c^2} - \frac{9a^2}{4c} - \frac{3a^3}{8b^2}$.

XLI.

Die Theilung der unverwickelten Größen wird aus diesem Exempel hergeleitet.

Die Methode, welche man überhaupt bey allen solchen Verrichtungen, wie die vorhergehenden sind, das ist, bey den Theilungen der unverwickelten Größen beobachten muß, kann man leicht aus dem, was wir gesagt haben, herleiten, vornehmlich, da man schon die Vermehrung der unverwickelten Größen gelernet hat. Man kann diese Methode also ausdrücken.

Erstlich muß man die Coefficienten theilen, wenn die Theilung möglich ist, alsdenn jeden Buchstaben, welcher einerley Exponenten in dem Zähler und Nenner hat, weglassen, und hernach die Buchstaben, die im Nenner andere Exponenten haben, als im Zähler, durch einander theilen,

theilen, indem man die kleinern Exponenten von den größern abzieht, und die übrig gebliebenen Exponenten da läßt, wo die größern Exponenten waren. Was die von einander unterschiedenen Buchstaben anlangt, so hat man nichts dabey zu thun, als daß man sie abschreibt.

Da diese Verrichtung sehr oft nöthig ist, so wird es gut seyn, etliche Exempel hinzuzusetzen, um den Anfängern die Ausübung derselben zu erleichtern.

$$\frac{9a^5d^2b^2}{3a^4c^2d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}; \quad \frac{18a^4bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3cd}{7b}$$

$$\frac{27a^3b^2c^5}{3a^2bc^2} = 9abc^3; \quad \frac{5a^2b^4c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}.$$

XLII.

Sechstes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen.

Man habe die Gleichung $\frac{aax}{b-c} + dc = bx - ac$. Den Theiler $b-c$ wegzuschaffen, muß man, wie oben alle Glieder durch diesen Theiler vermehren, woraus man bekommen wird $aax + \overline{b-c} \times dc = \overline{bx-ac} \times \overline{b-c}$. Ich habe hier erstlich über $b-c$ in der ersten Hälfte einen Querstrich gemacht, weil man sonst denken könnte, dc sollte nur durch c vermehret werden. Zweytens habe ich Querstriche über $bx-ac$ und über $b-c$ in der zweyten Hälfte gemacht, damit man sehe, daß diese beyden ganzen Größen durch einander vermehret werden sollen.

Dieses muß man allezeit in Acht nehmen, wenn man Producte, oder Potenzen verwickelter Größen anzeigen will. Anstatt eines Quer-

Die Querstriche über den Größen dienen eben dazu, wozu die Haken dienen.

strichs braucht man zuweilen Haken. Also bedeutet $a^4(a+b)$ eben sowohl, als $a^4 \times \overline{a+b}$, das Product von a^4 durch $a+b$; $(a+b) \times (b+d)$ oder $\overline{a+b} \times \overline{b+d}$, das Product von $a+b$ durch $b+d$; $(ff+gg)^3$ oder $\overline{ff+gg}^3$ die Größe $ff+gg$, zu derjenigen Potenz erhöhet, deren Exponent 3 ist, das ist, (XXXVII. §.) zweymal durch sich selbst vermehret.

Nun kömmt es darauf an, daß man die durch die Zeichen $\times$ angezeigten Vermehrungen vornimmt. Wir wollen zuerst dc durch $b-c$ vermehren. Es ist klar, daß man dc durch b wird vermehren, und davon das Product von dc durch c abziehen müssen. Denn da $b-c$ um c kleiner ist, als b, so muß das Product davon durch dc um die Größe $c \times dc$ kleiner seyn, als das Product von b durch dc. Das Product von $b-c$ durch dc ist also $bdc - ccd$.

Wir wollen nun zu dem Producte von $bx - ac$ durch $b-c$ fortgehen. Dieses nun zu finden, merke ich erstlich an, daß, indem man die beyden Glieder $bx - ac$ für eine einzige Größe nimmt, das Product derselben durch $b-c$, vermöge dessen, was wir eben itzo gesehen haben, diejenige Größe ist, um welche das Product von $bx - ac$ durch b das Product von $bx - ac$ durch c übersteigt. Die Frage kömmt also nun auf zwo Vermehrungen, von derjenigen Art, dergleichen wir itzo gemacht haben, und auf eine Abziehung an.

Die erstere von diesen beyden Vermehrungen, nämlich

nämlich $bx - ac$ durch b, wird $bbx - abc$ und die letztere, nämlich $bx - ac$ durch c, wird $bcx - acc$ geben. Es ist also noch übrig, diese letztere Größe von der erstern abzuziehen, welches nach dem XXXIV. §. geben wird, $bbx - abc - bcx + ac^2$, und dieses ist das Product von $bx - ac$ durch $b - c$.

Auf diese Art sieht die Gleichung .... $\frac{aax}{b-c} + cd = bx - ac$, oder $a^2x + \overline{b-c} \times cd = \overline{bx - ac} \times \overline{b-c}$, nunmehr also aus, $a^2x + bcd - c^2d = b^2x - abc - bcx + ac^2$, welches durch die gewöhnlichen Versetzungen giebt $bcd - c^2d + abc - ac^2 = b^2x - bcx - a^2x$, oder endlich ....

$$x = \frac{bcd - ccd + abc - acc}{bb - bc - aa}.$$

XLIII.

Bey diesem Exempel haben wir nöthig gehabt, eine algebraische Regel zu machen, deren wir uns noch nicht bedienet hatten, und welche, da sie oft nützlich seyn kann, wohl verdienet, daß wir uns dabey aufhalten. Man nennet diese Regel die Vermehrung der vielgliederigen Größen. Eine vielgliederige oder verwickelte Größe bedeutet überhaupt eine aus verschiedenen Gliedern bestehende Größe. Wenn man die Zahl der Glieder einer Größe besonders anzeigen will, so nennet man sie eine zweygliederige Größe, wenn sie zwey Glieder hat, eine dreygliederige Größe, wenn sie drey Glieder hat rc.

Die Vermehrung der verwickelten oder vielgliederigen Größen wird aus dem vorhergehenden §. hergeleitet.

Zur Uebung in der Vermehrung solcher Größen wird es gut seyn, einige Exempel vorzuneh-

Exempel der Vermehrung viel-

gliederiger Größen.

zunehmen. Man soll erstlich das Product von $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ durch $3ab^2 - 4bcd$ finden.

Wenn man nun eben so schließet, wie in dem vorhergehenden §, so wird man sehen, daß, weil die Größe $3ab^2 - 4bcd$ um $4bcd$ kleiner ist, als $3ab^2$, ihr Product durch $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ um das Product von $4bcd$ durch $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ kleiner seyn muß, als das Product von $3ab^2$ durch $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$.

Folglich schreibe ich anfänglich das verlangte Product also, $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 3ab^2 - \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 4bcd$.

Verrichtet man nun die durch die Zeichen $\times$ angezeigten Vermehrungen eben so, wie die Vermehrungen der unverwickelten Größen, so bekömmt man $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2$ für den Werth des ersten Productes $(2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5) \times 3ab^2$. Auf eben diese Art bekömmt man $8a^3bc^3d - 20a^4b^2cd + 24a^5bcd$ für den Werth des zweyten Productes $(2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5) \times 4bcd$. Zieht man hernach das letztere von dem erstern ab, wie es in der vorhergehenden Ausdrückung angezeiget worden, so bekömmt man $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2 - 8a^3bc^3d + 20a^4b^2cd - 24a^5bcd$, als das Product der beyden gegebenen Größen.

XLIV.

XLIV.

Wenn der Vermehrer der vorhergehenden Größe ausser den beyden Gliedern $3ab^2 - 4bcd$ noch ein Glied, z. E. $-5abc$, gehabt hätte, so ist klar, daß man, um das ganze Product zu bekommen, von der vorhergehenden Größe das Product von $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ durch $5abc$ hätte abziehen müssen. Denn man würde ebenfalls gesagt haben, weil der Vermehrer $3ab^2 - 4bcd - 5abc$ um $5abc$ kleiner ist, als der Vermehrer $3ab^2 - 4bcd$, so muß sein Product durch $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ um $5abc \times (2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5)$ kleiner seyn, als das Product von $3ab^2 - 4bcd$ durch $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$. Aus eben der Ursache würde man, wenn ein ander Glied z. E. $3acc$, bey dem Vermehrer mit dem Zeichen + gewesen wäre, das Product von $3acc \times (2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5)$ zu den vorhergehenden Producten haben hinzusetzen müssen.

Ueberhaupt sieht man, wenn eine zu vermehrende Größe, oder welche vermehret (multipliciret) werden soll, nebst der Größe, durch welche sie vermehret werden soll, gegeben ist, so müße man alle Producte jener Größe durch ein jedes Glied des Vermehrers machen, und diese Producte, nachdem die Glieder, aus welchen sie entstanden sind, das Zeichen + oder — haben, zu einander setzen, oder von einander abziehen. Grundregel der Vermehrungen.

Damit man dieses in der nöthigen Ordnung verrichte, so will ich anzeigen, wie man dabey verfährt.

XLV.

Wie man bey dem Vermehren verfahren muß.

Erstlich schreibt man den Vermehrer unter die zu vermehrende Größe, und macht einen Strich unter den Vermehrer. Damit man nun hernach die erste Zeile des Products bekomme, welches unter diesen Strich geschrieben werden muß: so vermehret man das erste Glied des Vermehrers durch ein jedes Glied der zu vermehrenden Größe, und läßt jeder von den also herausgebrachten Größen das Zeichen des Gliedes der zu vermehrenden Größe, wenn das erste Glied des Vermehrers das Zeichen +, oder, welches eben so viel ist, gar kein Zeichen vor sich hat.

Um nun hernach die zweyte Zeile zu machen, welche unter die erste geschrieben werden muß, so vermehret man das zweyte Glied des Vermehrers durch alle Glieder der zu vermehrenden Größe; und wenn dieses zweyte Glied des Vermehrers auch noch das Zeichen + hat, so hat man eben das zu thun, was bey der ersten Zeile zu thun war. Wenn es aber das Zeichen — hat, so setzt man vor ein jedes der Producte, woraus diese Zeile zusammengesetzt ist, ein dem Zeichen des Gliedes der zu vermehrenden Grösse, worauf es sich beziehet, entgegengesetztes Zeichen. Wenn man hierauf alle die andern Zeilen des Products auf eben diese Art gemachet hat, nämlich vermittelst der übrigen Glie-

der

der des Vermehrers, welche man durch alle Glieder der zu vermehrenden Größe vermehret, so zieht man einen Strich, und macht die Zusammensetzung oder Verkürzung aller dieser besonders herausgebrachten Größen; die Größe, welche endlich herauskömmt, ist das verlangte ganze Product.

Wir haben vorausgesetzt, daß das erste Glied des Vermehrers das Zeichen + habe. Wenn es nun aber das Zeichen — hätte, so sieht man wohl, daß man bey diesem Gliede, eben so, wie bey den andern, wenn sie das Zeichen — haben, dieses zu beobachten hätte, daß man vor das Product dieses Gliedes die den Zeichen der Glieder der zu vermehrenden Größe entgegengesetzten Zeichen setzen müßte.

XLVI.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel.

Diese Methode deutlich zu machen, wollen wir sie auf ein Exempel anwenden. Man soll die beyden Größen $2ab - 4ac + ad$ und $3ab - 5ac + 2ad$ durch einander vermehren. Wenn die erste für die zu vermehrende Größe, und die zweyte für den Vermehrer genommen wird, so schreibt man diese letzte unter die erstere und zieht hernach einen Strich unter beyde Größen. Siehe das erste Feld der beygefügten Tafel.

Wenn dieses geschehen ist, so bemerke man, daß das erste Glied des Vermehrers als positiv angesehen wird, und daß folglich alle Zeichen der Glieder in der ersten Zeile des Productes eben dieselben seyn müssen, welche in der zu vermehren-

mehrenden Größe vorkommen. Man schreibt also, kraft dieser Anmerkung, in die erste Zeile unter dem Striche das erste Glied $6a^2b^2$, welches herauskömmt, wenn man $3ab$ durch $2ab$ vermehret, und man setzt kein Zeichen vor, welches eben so viel ist, als setzte man das Zeichen + vor.

Hernach macht man ein — zum Zeichen des zweyten Gliedes eben dieser Zeile, weil es das Zeichen des zweyten Glieds der zu vermehrenden Größe ist. Nach diesem — schreibt man $12a^2bc$, welches herauskömmt, wenn man $4ac$ und $3ab$ durch einander vermehret. Man behält gleichfalls das Zeichen + des dritten Gliedes der zu vermehrenden Größe für das dritte Glied der ersten Zeile des Productes bey, und schreibt darnach dieses Glied $3a^2bd$, welches herauskömmt, wenn man ad und $3ab$ durch einander vermehret. Wenn nun also die erste Zeile des Productes fertig ist, so merke man an, daß das zweyte Glied des Vermehrers das Zeichen — hat, und daß man folglich alle Zeichen der zu vermehrenden Größe verändern muß, um die Glieder der zweyten Zeile des Productes zu bekommen. Also muß das erste Glied dieser zweyten Zeile ein — haben, welches man vor $10a^2bc$, als das Product der beyden Glieder $2ab$, $5ac$ setzet.

Da das zweyte Glied eben dieser Reihe das Zeichen + haben muß, weil das zweyte Glied der zu vermehrenden Größe das Zeichen — hat, so schreibt man dieses Zeichen + vor

das

das Product $20a^2c^2$ der beyden Glieder $4ac, 5ac$.

Da vor dem dritten Gliede ad der zu vermehrenden Größe das Zeichen + steht, so muß das dritte Glied in eben dieser Zeile das Zeichen — bekommen, welches man vor das Product $5a^2cd$ der beyden Glieder ad, $5ac$, setzt.

Was die dritte Zeile des gesuchten Productes anlangt, so muß man, da das dritte Glied des Vermehrers das Zeichen + hat, alle Zeichen der zu vermehrenden Größe beybehalten. Also wird das erste Glied, das ist, das Product aus $2ab$ und $2ad$, seyn $4a^2bd$ mit dem vorgesetzten Zeichen +; das zweyte, das ist, das Product aus $4ac$ und $2ad$ wird seyn $8a^2cd$ mit dem vorgesetzten Zeichen —, und das dritte Glied, das ist, das Product aus $2ad$ durch ad wird seyn $2a^2d^2$ mit dem vorgesetzten Zeichen +.

Damit sich die Anfänger in der Ausübung dieser Regel fest setzen können, so habe ich auf eben dieser Tafel einige andere Exempel beygefüget.

XLVII.

Siebendes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen.

Es sey $\frac{abb+abd-abx}{d-c} = ax - ac$. Erstlich schafft man den Theiler $d-c$ weg, indem man $ax-ac$ durch $d-c$ vermehret. Hierdurch bekömmt man $ab^2+abd-abx = \overline{ax-ac} \times d-c$, oder $ab^2+abd-abx = adx-acd-acx+acc$, woraus, wenn man alle die Glieder, in welchen ein x ist, auf die eine, und

die

die bekannten Glieder auf die andere Seite bringt, folgendes wird $ab^2 + abd + acd - acc = abx + adx - acx$; und hieraus bekömmt man . . . .

$$x = \frac{abb + abd + acd - acc}{ab + ad - ac}.$$

In diesem Ausdrucke bemerkt man ein gewisses Verhältniß zwischen den Gliedern der zu theilenden Größe und den Gliedern des Theilers, woraus man vermuthen kann, daß die Theilung vollkommen werde geschehen können, und wodurch man bewogen wird, diese Operation zu versuchen, welche ziemlich leicht seyn muß, nachdem man gesehen hat, wie die Vermehrung, welche das Umgekehrte davon ist, geschiehet.

Wie man die in diesem Exempel angedeutete Theilung verrichtet.

Damit man nun sehe, ob $ab + ad - ac$ das $ab^2 + abd + acd - ac^2$ wirklich vollkommen theilen kann, so theile man erstlich ein Glied von dieser letztern Größe durch ein Glied von der erstern Größe. Man theile z. E. ab^2 durch ab und schreibe den Quotienten b besonders. Hernach vermehre man diesen Quotienten b, oder vielmehr diesen ersten Theil des gesuchten Quotienten, durch den ganzen Theiler $ab + ad - ac$, und ziehe das Product $ab^2 + abd - abc$ von der zu theilenden Größe ab. Der Rest $ab^2 + abd + acd - ac^2 - ab^2 - abd + abc$, oder $acd - ac^2 + abc$, muß hernach eben wieder durch diesen Theiler getheilet, und der Quotient davon muß zu dem vorhergehenden b hinzugesetzt werden, damit der gesuchte ganze Quotient herauskomme.

Diese

1. Feld.

$$\begin{array}{l} 2ab - 4ac + ad \\ 3ab - 5ac + 2ad \\ \hline 6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd \\ - 10a^2bc + 20a^2c^2 - 5a^2cd \\ + 4a^2bd - 8a^2cd + 2a^2d^2 \\ \hline 6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20a^2c^2 - 13a^2cd + 2a^2d^2 \end{array}$$

2. Feld.

$$\begin{array}{l} 5a^3b - 2ab^3 + 4a^2c^2 \\ 2a^3b - ab^3 + 3a^2c^2 \\ \hline 10a^6b^2 - 4a^4b^4 + 8a^5bc^2 \\ - 5a^4b^4 + 2a^2b^6 - 4a^3b^3c^2 \\ + 15a^5bc^2 - 6a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \\ \hline 10a^6b^2 - 9a^4b^4 + 23a^5bc^2 + 2a^2b^6 - 10a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \end{array}$$

3. Feld.

$$\begin{array}{l} 2a^4x^2 - 3b^4y^2 \\ 2a^4x^2 + 3b^4y^2 \\ \hline 4a^8x^4 - 6a^4b^4x^2y^2 \\ + 6a^4b^4x^2y^2 - 9b^8y^4 \\ \hline 4a^8x^4 - 9b^8y^4 \end{array}$$

4. Feld.

$$\begin{array}{l} 5ab + 3ac - cc \\ - 5ab + 3ac - cc \\ \hline - 25a^2b^2 - 15a^2bc + 5abcc \\ + 15a^2bc + 9a^2c^2 - 3ac^3 \\ - 5abc^2 - 3ac^3 + c^4 \\ \hline - 25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4 \end{array}$$

5. Feld.

$$\begin{array}{l} 2abx - bxy + aax + 3aay \\ 2ax - 3ay \\ \hline 4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy \\ - 6a^2bxy + 3abxy^2 - 3a^3xy - 9a^3y^2 \\ \hline 4a^2bx^2 - 2abx^2y + 2a^3x^2 + 6a^3xy - 6a^2bxy + 3abxy^2 - 3a^3xy - 9a^3y^2 \end{array}$$

W
die
sem
pel a
tete
lung
richt

Diese Theilung zu verrichten, nehme ich wiederum eins von den Gliedern der Größe $acd - ac^2 + abc$, welche noch zu theilen übrig ist, und theile es durch ein Glied des Theilers. Ich wähle z. E. acd, um dasselbe durch ad zu theilen. Diese Theilung giebt mir c. Ich vermehre also durch diesen neuen Quotienten den ganzen Theiler $ab + ad - ac$, und ziehe das Product $abc + acd - ac^2$ von der übrig gebliebenen zu theilenden Zahl $acd - acc + abc$ ab. Weil nun beyde Größen einerley sind, und folglich nichts zu theilen übrig bleibt, so sehe ich daraus, daß $b + c$ der vollkommene Quotient ist, welcher aus der Theilung des $ab^2 + abd + acd - ac^2$ durch $ab + ad - ac$ entstehet, und folglich der Werth von x.

XLVIII.

Wenn man die vorhergehende Theilung verrichtet hat, so sieht man ohngefähr, wie man in den andern Exempeln verfahren muß. Damit man bey der Theilung eine gewisse Ordnung beobachte, so schreibt man gemeiniglich den Theiler zur Rechten neben der zu theilenden Größe, und unterscheidt beydes von einander durch einen Strich in die Länge. Ferner sucht man sich in der zu theilenden Größe ein Glied aus, welches durch ein Glied des Theilers getheilet werden kann. Den Quotienten dieser beyden Glieder schreibt man unter den Theiler, und setzt das Zeichen + vor, wenn die beyden durch einander getheilten Glieder einerley Zeichen haben; hingegen setzt man das Zeichen — vor,

Allgemeine Methode der Theilung der verwickelten Größen.

vor, wenn diese beyden Glieder unterschiedene Zeichen haben. Wenn dieses geschehen ist, so vermehret man diesen Quotienten durch alle Glieder des Theilers, und schreibt das dadurch herausgebrachte unter die zu theilende Größe. Da aber dieses herausgebrachte von der zu theilenden Größe abgezogen werden soll, so setzt man, indem man es unter die zu theilende Größe schreibt, vor jedes Glied das Zeichen, welches dem durch die Vermehrung entstandenen Zeichen entgegengesetzt ist.

Wenn dieses Product also geschrieben ist, so zieht man einen Querstrich, und macht die Abkürzung mit der zu theilenden Größe. Die übrig bleibende Größe wird von neuen durch eben denselben Theiler getheilet. Man wählet darinne gleichfalls ein Glied, welches durch eines von den Gliedern des Theilers kann getheilet werden, und den Quotienten schreibt man als ein zweytes Glied neben dem ersten. Man setzt vor dasselbe das Zeichen + oder —, nachdem die beyden Glieder, welche man genommen hat, einerley oder verschiedene Zeichen haben. Man vermehret hierauf dieses Glied durch alle Glieder des Theilers, und schreibt das Product unter die zu theilende Größe, wobey man eben, wie bey dem ersten male, die Zeichen verändert, welche die Vermehrung giebt. Hierauf zieht man einen Querstrich und verrichtet die Abkürzung. Wenn nicht alle Glieder einander aufheben, so schreibt man den Rest unter diesen Querstrich, und fährt mit dieser Verrichtung

auf

auf eben diese Art so lange fort, bis alle Glieder der zu theilenden Größen verschwunden sind.

Bey dieser Verrichtung kann man manchmal ungewiß seyn, welche unter den Gliedern der zu theilenden Größe und des Theilers man wählen solle, um die Glieder des Quotienten herauszubringen. Um nun bey dieser Wahl alles Versuchen zu vermeiden, hat man folgendes ausgedacht.

Wie man alles Versuchen bey der Theilung vermeidet.

Man wählet anfangs nach Gutdünken einen Buchstaben, welcher in der zu theilenden Größe und in dem Theiler zugleich ist, und setzt die Glieder dieser beyden Größen so hinter einander, daß das erste Glied allezeit dasjenige ist, in welchem dieser Buchstabe den größten Exponenten hat. Zum zweyten Gliede macht man dasjenige, in welchem eben dieser Buchstabe den größten Exponenten nach dem ersten hat, und so fährt man mit den übrigen Gliedern fort. Wenn man nun die beyden vorgegebenen Größen nach einerley Buchstaben also **geordnet** hat (so nennt man diese Verrichtung): so ist man in der Wahl der Glieder, welche durch einander getheilet werden sollen, nicht mehr zweifelhaft; man muß allemal das erste Glied der zu theilenden Größe und das erste Glied des Theilers nehmen.

Was eine Größe nach einerley Buchstaben ordnen heißt.

Wenn nun, nachdem man durch diese beyden ersten Glieder des Theilers und der zu theilenden Größe das erste Glied des Quotienten gemacht, und das Product desselben mit entgegengesetzten Zeichen unter die zu theilende Größe geschrieben hat, hierdurch

Glieder entstanden sind, die keine ihnen ähnliche in der zu theilenden Größe haben, so muß man, wenn man die Größe schreibt, welche nach der Abkürzung herauskömmt, die Glieder so hinter einander schreiben, daß die Größe, welche zu theilen übrig bleibt, allezeit nach eben demselben Buchstaben, wie der Theiler, geordnet bleibe.

XLIX.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel.

Den Anfängern den Gebrauch dieser Methode zu erleichtern, wollen wir einige Exempel vornehmen. Es soll anfänglich die Größe $31aabb + 2a^4 + 24b^4 - 38ab^3 - 13a^3b$ durch die Größe $-3ab + 2aa + 4bb$ getheilet werden.

Nachdem ich diese beyden Größen, wie man in der beygefügten Tafel, im 1 Felde, sieht, wo sie nach dem Buchstaben a geordnet sind, geschrieben, so theile ich das erste Glied $2a^4$ der zu theilenden Größe durch das erste Glied $2a^2$ des Theilers, und schreibe den Quotienten aa unter den Theiler, ohne ihm ein Zeichen vorzusetzen, das ist, ich mache ihn positiv, weil die Glieder $2a^4$ und $2aa$ einerley Zeichen haben. Wenn ich den Quotienten aa geschrieben habe, so vermehre ich ihn durch alle Glieder des Theilers, und, da mir diese Vermehrung zum ersten Gliede $2a^4$, als das Product von aa durch $2aa$, mit dem Zeichen $+$, geben muß, so schreibe ich dieses Glied unter die zu theilende Größe, mit dem Zeichen $-$, weil es soll abgezogen werden.

Ferner,

Ferner, da das zweyte Glied $3ba^3$, als das Product von aa durch $3ba$, durch die Vermehrung das Zeichen — bekommen sollte, so schreibe ich unter die zu theilende Größe $+3ba^3$, weil es abgezogen werden soll. Endlich, weil das dritte Glied $4b^2a^2$, als das Product von aa durch $4bb$, durch die Vermehrung das Zeichen + bekommen sollte, so setze ich ihm, indem ich es unter die zu theilende Größe schreibe, das Zeichen — vor.

Wenn dieses geschehen ist, so mache ich einen Strich, und verrichte die Abkürzung. Die Größe, welche hernach übrig bleibt, ist $-10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4$, welche man durch eben den Theiler $2a^2 - 3ba + 4bb$ theilen muß. Diese Theilung zu verrichten, nehme ich das erste Glied $-10ba^3$ von dieser zu theilenden Größe, und theile es durch das erste Glied $2a^2$ des Theilers. Der Quotient davon ist $5ba$, welchem ich das Zeichen — vorsetze, weil die Glieder $10ba^3$ und $2a^2$ nicht einerley Zeichen haben. Wenn ich nun $-5ba$ neben a^2 geschrieben habe, so muß ich dieses neue Glied des Quotienten durch alle Glieder des Theilers vermehren, und, indem ich die daraus entstehenden Glieder unter die zu theilende Größe schreibe, die Zeichen derselben verändern.

Ich vermehre also anfänglich $5ba$ durch $2a^2$, und da das Product negativ seyn sollte (weil das Zeichen — des $5ba$, nach den Regeln der Vermehrung, die Zeichen der zu vermehren-

den Größe $2a^2 - 3ba + 4b^2$ verändern muß), hingegen zufolge dem, was wir gesagt haben, die Zeichen der herausgebrachten Größen verändert werden müssen, wenn man sie unter die zu theilende Größe schreibt, so schreibe ich unter diese Größe $+ 10ba^3$. Eben so setze ich vor $15bbaa$, das ist, vor das Product von $3ba$ durch $5ba$, anstatt des Zeichens $+$, welches man durch die Vermehrung bekommen würde, das Zeichen $-$, indem ich es unter die zu theilende Größe schreibe. Endlich da vor $20b^3a$, als dem Producte von $5ba$ durch $4bb$, das Zeichen $-$ stehen sollte, welches die Vermehrung erforderte, so setze ich davor das Zeichen $+$, indem ich es unter die zu theilende Größe schreibe. Hernach mache ich einen Strich, und verrichte die Abkürzung, wodurch ich $12b^2a^2 - 18b^3a + 24b^4$ bekomme, welche Größe nochmals durch $2a^2 - 3ba + 4bb$ getheilet werden muß.

Diese neue Theilung zu verrichten, theile ich das Glied $12b^2a^2$ durch $2a^2$, und ich bekomme zum dritten Gliede des Quotienten $6bb$. Dieses schreibe ich neben den beyden ersten Gliedern, und gebe ihm das Zeichen $+$, weil $12b^2a^2$ und $2aa$ einerley Zeichen haben.

Vermehre ich nun $6b^2$ durch $2a^2$, so bekomme ich $12b^2a^2$, welchem ich das Zeichen $-$ gebe, indem ich es unter die zu theilende Größe schreibe, weil es durch die Vermehrung das Zeichen $+$ würde bekommen haben. Ferner

ner bekomme ich, indem ich $6b^2$ durch $3ba$ vermehre, $18b^3a$, welchem ich, indem ich es unter die zu theilende Größe schreibe, das Zeichen $+$ gebe, weil es durch die Vermehrung das Zeichen $-$ würde bekommen haben. Endlich wenn ich $6bb$ durch $4b^2$ vermehre, so bekomme ich $24b^4$, welchem ich das dem Zeichen, welches die Vermehrung geben würde, entgegengesetzte Zeichen, nämlich das Zeichen $-$, gebe. Wenn ich nun hernach die Abkürzung verrichte, so sehe ich, daß alle Glieder einander aufheben. Folglich ist die Theilung vollkommen geschehen, und also ist der gesuchte Quotient $aa - 5ba + 6bb$.

L.

Man soll nunmehr $6b^3c - b^4 - 9c^2b^2 + 4c^4$ durch $-3cb + b^2 + 2c^2$ theilen. Ich schreibe diese beyden Größen so hin, wie man sie in dem zweyten Felde der nachstehenden Tafel sieht, und ordne sie nach dem Buchstaben c. Ein ander Exempel.

Wenn ich nun hernach die beyden ersten Glieder theile, so bekomme ich $2c^2$ zum ersten Gliede des Quotienten. Vermehre ich dasselbe durch den Theiler, so bekomme ich, indem ich die Zeichen verändere, die Größe $-4c^4 + 6bc^3 - 2b^2c^2$. Diese schreibe ich unter die zu theilende Größe, und sie giebt mir den Rest $6bc^3 - 11b^2c^2 + 6b^3c - b^4$, bey welchem ich dieses beobachtet habe, daß ich das durch die Vermehrung entstandene Glied $6bc^3$, worinnen ein c^3

ist, zuerst geschrieben, damit die Größe nach dem c geordnet bleibe. Hierauf theile ich dieses erste Glied $6bc^3$ durch $2c^2$, und bekomme $3bc$ mit dem Zeichen $+$ zum Quotienten. Ich vermehre wiederum dieses neue Glied des Quotienten durch den Theiler, und setze die herauskommenden Glieder, mit Veränderung ihrer Zeichen, unter die zu theilende Größe. Verrichte ich alsdenn die Abkürzung, so bekomme ich nicht mehr, als $-2b^2c^2+3b^3c-b^4$, zu theilen. Wenn ich das erste Glied dieser Größe durch das erste Glied des Theilers theile, so bekomme ich zum dritten Gliede des Quotienten b^2 mit dem Zeichen $-$, weil die Glieder $2b^2c^2$ und $2c^2$ verschiedene Zeichen haben; und da das Product dieses dritten Gliedes durch den Theiler alle Glieder der zu theilenden Größe aufhebt, so schließe ich daraus, daß die Theilung vollkommen geschehen ist, und daß $2c^2+3bc-b^2$ der verlangte Quotient ist.

LI.

Was man bey Ordnung der Glieder zu beobachten hat, wenn verschiedene Buchstaben in Betrachtung kommen.

Wenn man die zu theilende Größe und den Theiler nach einerley Buchstaben ordnen will, und man findet, daß in unterschiedenen Gliedern dieser Buchstabe auf einerley Potenz erhöhet ist, so wird man noch immer der Verdrießlichkeit des Versuchens ausgesetzt seyn, wenn man nicht diese Glieder noch nach einem andern Buchstaben ordnet, welchen beyde Größen mit einander gemein haben.

Wir wollen z. E. setzen, die zu theilende Größe wäre nach dem Buchstaben d geordnet

worden,

worden, und man bekäme folgende Glieder hinter einander $3ac^2d^3 - c^3d^3 - 3a^2cd^3 + a^3d^3$ zu den ersten Gliedern der zu theilenden Größe, und es wären ebenfalls in dem Theiler $a^2d^2 + c^2d^2 - 2acd^2$ die ersten Glieder. Man ordne nun diese beyden Größen also, $a^3d^3 - 3ca^2d^3 + 3c^2ad^3 - c^3d^3$; $a^2d^2 - 2acd^2 + ccd^2$, das ist, man ordne sie nach dem Buchstaben a: So wird man bey der Theilung kein Versuchen mehr nöthig haben; nur muß man allemal, so oft man ein Glied des Quotienten sucht, die zu theilende Größe eben so ordnen. Ich habe in der folgenden Tafel noch einige Exempel beygefügt, um die Anfänger in dieser Aufmerksamkeit bey der Theilung zu üben.

LII.

Bey der Auflösung der vorhergehenden Aufgaben haben wir nur eine unbekannte Größe nöthig gehabt, weil, eigentlich zu reden, in diesen Aufgaben nur eine Größe zu suchen war. Aber da man, wenn man in der Algebra weiter geht, Aufgaben findet, wo man mehrere unbekannte Größen brauchen muß, so wollen wir sehen, wie man dabey verfähret.

Wenn die eigenthümlichen Schweren zwoer in einer Vermischung enthaltenen Materien, nebst dem Inhalte und dem Gewichte der ganzen Vermischung, gegeben sind, zu finden, wieviel von einer jeden Materie in der Vermischung enthalten ist.

Eine Aufgabe, in welcher zwo unbekannte Größen vorkommen.

Man drücke die Anzahl der Cubiczolle, welche in dieser Vermischung enthalten sind, oder überhaupt

haupt den Inhalt derselben, er sey nun ausgemessen worden, wie er wolle, aus durch . . . a.
Das ganze Gewicht derselben drücke man aus durch . . . . b.
Die Menge der ersten in der Vermischung enthaltenen Materie, z. E. wieviel Cubiczolle von dieser Materie darinne seyn, drücke man aus durch . . . . x.

Das Gewicht eines Cubiczolles dieser Materie, oder überhaupt ihre eigenthümliche Schwere sey . . . . c.

Die Menge der zweyten Materie sey . . . y.

Ihre eigenthümliche Schwere sey . . . . d.

Also wird das Gewicht der Menge der ersten in der Vermischung enthaltenen Materie seyn . . . . cx.

Denn wenn x die Anzahl der Cubiczolle von dieser Materie, und c das Gewicht eines jeden Cubiczolles ausdrückt, so wird ihr ganzes Gewicht das Product von diesen beyden Zahlen seyn. Eben so wird das Gewicht der Menge der zweyten Materie seyn . . . . dy.

Da nun diese beyden Gewichte, wenn sie zusammengesetzt werden, das Gewicht der ganzen Vermischung ausmachen müssen, so bekömmt man die Gleichung

$$cx + dy = b.$$

Aber diese Gleichung ist nicht hinlänglich zur Auflösung der Aufgabe. Denn wenn man die eine unbekannte Größe, z. E. x, absondern will, so bekömmt man

$2a^4 - 13ba^3 + 31b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4 \quad | \quad 2a^2 - 3ba + 4b^2$

$-2a^4 + 3ba^3 - 4b^2a^2 \quad | \quad a^2 - 5ba + 6b^2$

$-10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4$

$+10ba^3 - 15b^2a^2 + 20b^3a$

$+12b^2a^2 - 18b^3a + 24b^4$

$-12b^2a^2 + 18b^3a - 24b^4$

0

1. Feld.

$4c^4 - 9bbcc + 6b^3c - b^4 \quad | \quad 2cc - 3bc + bb$

$-4c^4 + 6bc^3 - 2bbcc \quad | \quad 2cc + 3bc - bb$

$6bc^3 - 11b^2c^2 + 6b^3c - b^4$

$-6bc^3 + 9b^2c^2 - 3b^3c$

$-2b^2c^2 + 3b^3c - b^4$

$+2b^2c^2 - 3b^3c + b^4$

0

2. Feld.

$a^3d^3 - 3ca^2d^3 + 3c^2ad^3 - c^3d^3 + c^2a^2d^2 - c^3ad^2 \quad | \quad a^2d^2 - 2cad^2 + c^2d^2 + ac^2d$

$-a^3d^3 + 2ca^2d^3 - c^2ad^3 \qquad - c^2a^2d^2 \quad | \quad ad - cd$

$-ca^2d^3 + 2c^2ad^3 - c^3d^3 - c^3ad^2$

$+ca^2d^3 - 2c^2ad^3 + c^3d^3 + c^3ad^2$

0

3. Feld.

$a^2b^4 - c^2b^4 - ca^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + 2c^3abb - c^4ab + c^6 \quad | \quad ab^2 - cb^2 + 2cab + c^3$

$-a^2b^4 + cab^4 - 2ca^2b^3 \qquad - c^3abb \quad | \quad ab^2 + cb^2 - 3cab + c^3$

$cab^4 - c^2b^4 - 3ca^2b^3 + 5c^2ab^3 - 6ccaabb + c^3abb - c^4ab + c^6$

$-cab^4 + c^2b^4 \qquad - 2c^2ab^3 \qquad - c^4bb$

$-3ca^2b^3 + 3c^2ab^3 - 6c^2a^2b^2 + c^3ab^2 - c^4bb - c^4ab + c^6$

$+3ca^2b^3 - 3c^2ab^3 + 6c^2a^2b^2 \qquad + 3c^4ab$

$c^3ab^2 - c^4bb + 2c^4ab + c^6$

$-c^3ab^2 + c^4bb - 2c^4ab - c^6$

0

4. Feld.

$6b^2a^2 - dba^2 - d^2a^2 + cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2 \quad | \quad 2ba - da + 3cb$

$-6b^2a^2 + 3dba^2 \qquad - 9cb^2a \quad | \quad 3ba + da - 4cb$

$2dba^2 - d^2a^2 - 8cb^2a + 7dcba - 12c^2b^2$

$-2dba^2 + d^2a^2 \qquad - 3dcba$

$-8cb^2a + 4dcba - 12c^2b^2$

$+8cb^2a - 4dcba + 12c^2b^2$

0

5. Feld.

$$x = \frac{b - dy}{c},$$

aus welcher Gleichung man nicht sehen kann, wie groß x ist, wenn man nicht voraussetzt, daß y bekannt sey. Man muß also noch was anders vornehmen, um zu erfahren, wie groß y ist. Hierzu zu gelangen, muß man sehen, ob man auf alles Acht gehabt hat, was die Aufgabe erfordert, oder, mit den Algebraisten zu reden, ob man allen Bedingungen der Aufgabe Genüge gethan hat. Wenn man die Sache nur ein wenig überlegt, so wird man sehen, daß man nur eine von den beyden Bedingungen ausgedrückt hat, nämlich die, daß das ganze Gewicht der Vermischung b seyn soll, und daß man diejenige nicht in Betrachtung gezogen hat, welche uns anzeigt, daß die Menge der ersten Materie, wenn sie zu der Menge der zweyten Materie hinzugesetzt wird, den ganzen Inhalt ausmachen muß. Man bekömmt also durch diese zweyte Bedingung die Gleichung

$$x + y = a,$$

welche, da sie uns $x = a - y$ giebt, uns eben so wenig, als die erstere, den Werth von x anzeigt, wenn der Werth von y nicht bekannt ist.

Ob man nun gleich durch keine von diesen beyden Gleichungen besonders den Werth von x ohne das y finden kann, so findet man doch, wenn man sich beyder zugleich bedienet, bald ein Mittel, das y ganz bekannt zu machen. Denn weil jede von diesen beyden Gleichungen einen Werth von x giebt, so kann man diese beyden

Werthe einander gleich setzen, welches die Gleichung

$$\frac{b-dy}{c}=a-y$$

giebt, aus welcher man durch die vorhergehenden Methoden bekömmt $b-dy=ac-cy$, oder $ac-b=cy-dy$, oder endlich $y=\frac{ac-b}{c-d}$.

Da y bekannt ist, so sieht man wohl, daß x, welches so groß ist, als $a-y$, oder als $\frac{b-dy}{c}$, auch bekannt ist. Man darf also nur in eine von diesen beyden Größen, in welche man will, z. E. in die erste $a-y$, anstatt y setzen $\frac{ac-b}{c-d}$, so bekömmt man $a-\frac{ac-b}{c-d}$ zum Werthe von x.

Wenn man den vorhergehenden Werth $a-\frac{ac-b}{c-d}$ untersucht, so findet man gar bald, daß man ihn abkürzen kann. Denn wenn man dem a eben denselben Nenner geben will, welchen der Bruch $\frac{ac-b}{c-d}$ hat, so muß man es durch $c-d$ vermehren, welches $\frac{ac-ad}{c-d}$ anstatt a giebt. Also darf man nur noch von diesem Bruche den zweyten Bruch $\frac{ac-b}{c-d}$ abziehen. Wenn man demnach ihre Zähler von einander abzieht, und den Rest durch den gemeinschaftlichen Nenner theilet, so bekömmt man $\frac{ac-ad-ac+b}{c-d}$ oder $\frac{b-ad}{c-d}$, als den abgekürzten Werth von x.

Die

Die verlangten Größen, sowohl der ersten, als auch der zweyten, in der Vermischung enthaltenen Materie sind also ausgedrückt, und zwar die eine durch $\frac{ac-b}{c-d}$ und die andere durch $\frac{b-ad}{c-d}$; folglich ist die Aufgabe aufgelöset.

LIII.

Wenn man den Werth $\frac{ac-b}{c-d}$ von y, anstatt ihn in $a-y$ an die Stelle des y zu setzen, in $\frac{b-dy}{c}$, welches ebenfalls der Werth von x ist, an die Stelle des y gesetzt hätte, so hätte man bekommen $\frac{b-d\times\frac{ac-b}{c-d}}{c}$, welches anfänglich nicht eben derselbe Werth als $\frac{b-ad}{c-d}$ zu seyn scheinet. Aber da man weis, daß die Werthe $a-y$ und $\frac{b-dy}{c}$ von x einander gleich sind, und daß man eben dadurch, daß sie es sind, den Werth von y bestimmet hat, so kann man sicher seyn, daß man diese beyden letztern Werthe von x auch einerley befinden muß, wenn man sie in bekannten Größen ausgedrückt hat. Auf folgende Art kann man beyde auf einerley Ausdruck bringen.

Anfangs giebt man dem Buchstaben b den Nenner $c-d$. Dieses geschieht, wenn man ihn durch $c-d$ vermehret, das ist, wenn man $\frac{bc-bd}{c-d}$ anstatt b setzt. Hierdurch wird die vorhergehende Größe . . . .

$b-$

$$\frac{b - \frac{d\times\overline{ac-b}}{c-d}}{c} \text{ in } \frac{\frac{bc-bd-d\times(ac-b)}{c-d}}{c}$$

oder in $\frac{bc-bd-d\times(ac-b)}{cc-dc}$ verwandelt. Aber anstatt $d\times\overline{ac-b}$ kann man schreiben $acd-bd$, und da diese Größe von $bc-bd$ soll abgezogen werden, so wird die vorhergehende Größe $\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{cc-dc}$ durch die Abkürzung in $\frac{bc-dca}{c^2-dc}$ verwandelt werden, woraus, wenn man den Zähler und den Nenner durch einerley Größe c theilet, endlich $\frac{b-da}{c-d}$ wird, welches eben der obige Werth ist.

LIV.

Anwendung der vorhergehenden Auflösung auf ein Exempel.

Damit wir nun eine Anwendung der itzt gefundenen allgemeinen Auflösung machen, so wollen wir setzen, die Vermischung bestehe aus Gold und Silber *, ihr ganzes Gewicht sey 30 Unzen, ihr Inhalt 3 Cubiczoll, das Gewicht eines Cubiczolls Gold $12\frac{2}{3}$ Unzen, und das Gewicht eines Cubiczolls Silber $6\frac{8}{9}$ Unzen; so bekömmt man $a=3$, $b=30$, $c=12\frac{2}{3}$, $d=6\frac{8}{9}$. Wenn man nun diese Werthe in den beyden

* Die Aufgabe, welche Archimedes aufzulösen hatte, als er die Menge des mit dem Golde vermischten Silbers in der Krone des Königs Hiero bestimmen sollte, konnte nichts anders seyn, als das, was wir eben itzo gesehen haben. Er konnte diese Aufgabe auflösen, sobald er die eigenthümliche Schwere des Metalls dieser Krone bestimmet hatte, welches er that, indem er untersuchte, wieviel sie von ihrem Gewichte verlohr, da er sie im Wasser wog.

den allgemeinen Formeln $x = \frac{b - da}{c - d}$, und $y = \frac{ac - b}{c - d}$ an die Stellen der zugehörigen Buchstaben setzt, so wird daraus $x = \frac{21}{13}$, und $y = \frac{18}{13}$, das ist, die Vermischung wird $\frac{21}{13}$ Cubiczoll Gold, und $\frac{18}{13}$ Cubiczoll Silber in sich halten.

LV.

Man entdecket leicht aus dem, was man in der vorhergehenden Aufgabe gesehen hat, daß man allemal, wenn man zwo unbekannte Größen in einer Frage gebraucht hat, zwo Gleichungen haben muß, um dieselben abzusondern, und daß man, wenn man in einer Aufgabe nach zwoen Größen fragt, auch zwo Bedingungen angeben muß, um sie zu bestimmen, damit man durch diese beyden Bedingungen die beyden nöthigen Gleichungen bekommen könne. Um zu zeigen, wie man diese Bedingungen anwendet, wollen wir noch folgende Aufgabe vortragen.

LVI.

Eine andere Aufgabe, in welcher zwo unbekannte Größen vorkommen.

Zwo Quellen, derer jede immer gleich stark fließt, haben miteinander ein Wasserbehältniß a gefüllet, da die erste eine Zeit b, die andere eine Zeit c, geflossen. Eben diese beyden Quellen haben ein ander Wasserbehältniß d zusammen gefüllet, da die erste eine Zeit e, und die andere eine Zeit f geflossen. Man fragt, wie viel Wasser jede Quelle gegeben hat?

Es seyn x und y die Mengen von Wasser, das ist, z. E. die Menge Eimer, welche jede Quelle in einem Tage gegeben hat, wenn man

setzt,

setzt, daß die Wasserbehältnisse a und d nach Eimern gemessen, die Zeiten b, c, e, f aber nach Tagen gezählet worden.

Auf diese Art wird man bx für die Menge Wasser bekommen, welches die erste Quelle in der Zeit b, und cy wird man für die Menge Wasser bekommen, welches die andere Quelle in der Zeit c gegeben hat. Aber diese beyden Größen müssen, zufolge der ersten Bedingung der Aufgabe, dem Wasserbehältniße a gleich seyn. Man bekömmt also die Gleichung

$$bx + cy = a.$$

Eben so bekömmt man ex, fy für die Mengen des Wassers, welches eben diese Quellen in den Zeiten e, f, gegeben haben; und folglich wird die zweyte Bedingung geben

$$ex + fy = d.$$

Nun darf man nur aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von x und y herleiten. Dieses geschieht, eben so, wie in der vorhergehenden Aufgabe, wenn man einen Werth von x in y aus jeder von diesen beyden Gleichungen herleitet, und sie hernach einander gleich setzet. Der erste wird seyn $\frac{a - cy}{b}$, und der andere $\frac{d - fy}{e}$. Wenn man also diese beyden Werthe einander gleich setzet, so bekömmt man $\frac{a - cy}{b} = \frac{d - fy}{e}$, oder $ae - cey = bd - bfy$, oder $ae - bd = cey - bfy$, oder endlich

$$y = \frac{ae - bd}{ce - bf}.$$

Setzt man nun diesen Werth von y in einen von den beyden vorhergehenden Werthen von x an die Stelle des y, z. E. in $\frac{a-cy}{b}$, so bekömmt man $x = \frac{a - c \times \overline{\frac{ae-bd}{ce-bf}}}{b}$, oder

$x = \frac{a \times \overline{ce-bf} - c \times \overline{ae-bd}}{b \times \overline{ce-bf}}$, indem man dem ersten Gliede a eben denselben Nenner giebt, welchen das zweyte hat, und die beyden Nenner durch einander vermehret.

Wenn man nun die in diesem Werthe angezeigten Vermehrungen und die Abkürzung verrichtet, so bekömmt man

$$x = \frac{cd-af}{ce-bf}.$$

Nun hat man nichts mehr nöthig, als die einzelnen Werthe von a, b, c, d, e, f, um sie in diesen beyden allgemeinen Werthen von x und y an dieser ihre Stelle zu setzen, damit man eine jede besondere beliebige Aufgabe daraus herleiten könne.

Es ist klar, daß man, anstatt mit Absonderung des x in den beyden vorhergehenden Gleichungen den Anfang zu machen, und die beyden Werthe, welche sie geben, einander gleich zu setzen, um y zu bekommen, auch mit Absonderung des y hätte anfangen können; da man dessen beyde Werthe einander gleich gesetzt hätte, um x daraus zu bekommen. Durch diese Verrichtung würde man nothwendig eben dasselbe gefunden haben.

LVII.

LVII.

Exempel der vorhergehenden Aufgabe in Zahlen.

Damit wir nun einige Anwendung dieser Aufgabe machen, so wollen wir setzen, als die erste Quelle 2, und die andere 3 Tage gelaufen, so hätten sie ein Wasserbehältniß von 195 Eimern gefüllet. Hernach wollen wir setzen, als die erste Quelle 5, und die zweyte 4 Tage gelaufen, so hätten sie ein Wasserbehältniß von 330 Eimern voll gemacht.

Man bekömmt also $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$; und folglich ist $dc - af = 210$, $ce - bf = 7$, $ae - db = 315$; woraus sich ergiebt

$$x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{210}{7} = 30$$

$$\text{und } y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{315}{7} = 45.$$

Also giebt die erste Quelle in diesem Exempel täglich 30, und die zweyte 45 Eimer.

LVIII.

Ein ander Exempel.

Wir wollen nun setzen, da die erste Quelle 4 Tage, und die zweyte 6 Tage gelaufen, so hätten sie mit einander in dieser Zeit ein Wasserbehältniß von 120 Eimern angefüllet: Ferner da die erste Quelle 3 Tage, und die andere 7 Tage gelaufen, hätten sie zusammen ein Wasserbehältniß von 190 Eimern angefüllet.

In diesem Fall wird man bekommen $a = 120$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$, und folglich wird seyn $dc - af = 300$, $ce - bf = -10$, $ae - bd = -400$, woraus sich ergeben wird

$x =$

$$x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{300}{-10}$$

und $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = \frac{-400}{-10}$.

Als man zum ersten male solche Werthe gefunden hat, das ist, negative Größen, welche durch negative Größen getheilet werden, und positive Größen, welche durch negative Größen getheilet werden, so wird man nicht gewußt haben, was sie bedeuten sollen, und diejenigen, welche sich befürchtet haben, falsche metaphysische Schlüsse zu machen, werden sich bemühet haben, in der Aufgabe etwas weiter zurückzugehen, um dergleichen Theilungen zu vermeiden. Bey gegenwärtiger Aufgabe z. E. hat man in dieser Absicht auf folgende Art verfahren können.

Etwas besonderes in den Ausdrücken, zu welchen man in diesem Exempel gelanget.

Man hat die beyden allgemeinen Gleichungen $bx + cy = a$ und $ex + fy = d$, wieder vornehmen, und in denselben anstatt a, b, c, d, e, f, die Werthe, welche diese Buchstaben in diesem Exempel haben, setzen können, wodurch man wird bekommen haben $4x + 6y = 120$ und $3x + 7y = 190$. Hierauf hat man nur aus diesen Gleichungen $x = 30 - \frac{3y}{2}$, und $x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y$ herleiten, und diese beyden Werthe einander gleich setzen dürfen, so wird man bekommen haben $30 - \frac{3y}{2} = \frac{190}{3} - \frac{7y}{3}$, oder $\frac{7}{3}y - \frac{3}{2}y = \frac{190}{3} - 30$, oder $y = 40$.

Wie man erfahren kann, was sie bedeuten.

Wenn man nun diesen Werth von y in $30 - \frac{3}{2}y$, als dem Werthe von x, an die Stelle

des y setzet, so bekömmt man $x = 30 - 60$, das ist, $x = - 30$. Auf diese Art wird man gesehen haben, ohne daran zweifeln zu können, daß $+ 40$ der Quotient von $- 400$ durch $- 10$, und $- 30$ der Quotient von $+ 300$ durch $- 10$ ist.

LIX.

Die Zeichen der Quotienten oder Producte betreffende allgemeine Lehrsätze.

Man wird hierauf gar bald folgende Regeln für allgemeine Grundregeln angenommen haben,
daß $+$ durch $+$ getheilt $+$ giebt,
daß $+$ durch $-$ getheilt $-$ giebt,
daß $-$ durch $+$ getheilt $-$ giebt, und
daß $-$ durch $-$ getheilt $+$ giebt;
und so auch bey der Vermehrung.

Auf diese Grundregeln hat man desto leichter fallen können, da man gleichsam zu denselben durch solche Betrachtungen ist geführet worden, welche man über die Zeichen hat anstellen müssen, die man vor den Gliedern der Producte und Quotienten gefunden, indem man die Regeln ausgeübet hat, welche für die Vermehrung und Theilung der verwickelten Größen gegeben worden.

Aber wenn es leicht ist, diese Grundregeln, so zu sagen, zu vermuthen, so sieht man doch auch wohl, daß man dieselbe nicht eher behaupten kann, als bis man viele Ueberlegungen darüber angestellet hat, und es ist zu glauben, daß die ersten Analysten wegen derselben nicht eher sicher gewesen sind, als bis sie solche in vielen Exempeln richtig befunden haben.

LX.

LX.

Damit wir uns nun versichern, daß die Vermehrung des — durch — im Producte allezeit + geben muß, so wollen wir sehen, was für Licht wir aus der im XLV. §. für die Vermehrungen gegebenen allgemeinen Methode hierinne bekommen können. Aus dieser Methode sieht man sehr deutlich, daß das Product einer Größe, z. E. $a-b$, durch eine andere $c-d$, seyn muß, $ac-bc-ad+bd$, und es erhellet folglich zugleich, daß das Glied bd, welches aus der Vermehrung von b durch d entstanden ist, das Zeichen + hat, da indessen die Buchstaben b und d, aus welchen es entstanden ist, das Zeichen — haben. Nun muß man also nur noch sehen, ob, wenn zwo negative Größen, als $-b$ und $-d$, keine positive Größe vor sich haben, ihr Product noch $+bd$ sey. Daß aber dieses so ist, das kann man leicht daher einsehen, weil die Methode, nach welcher man entdecket hat, daß das Product von $a-b$ durch $c-d$ seyn muß $ac-bc-ad+bd$, keine besondere Größe für a und für b bestimmet, und folglich dieselbe auch noch Statt haben muß, wenn man diese Größen gleich Null setzet. Nun wird aber in diesem Falle das Product $ac-bc-ad+bd$ in $+bd$ verwandelt, folglich ist $-b \times -d = +bd$.

Es wird bewiesen, daß $-b$ durch $-d$, $+bd$ giebt, obgleich nichts vor diesen Größen vorhergeht.

LXI.

Was die andern Fälle anlangt, das ist, wenn + durch — vermehret oder getheilet wird, so kann man sie auf eben diese Art darthun.

Die übrigen Fälle werden auf eben diese Art bewiesen.

LXII.

Wieder gefundene negative Werth die Aufgabe auflöset.

Nun wollen wir wieder zu unserer letzten Anwendung der vorhergehenden Aufgabe zurückgehen. Wir bemerken, daß man, nachdem man $x = -30$, und $y = +40$ gefunden hat, noch in eine andere Art von Verwirrung hat gerathen müssen, in so ferne man nämlich nicht gewußt hat, was dieser negative Werth von x bedeute. Es ist wahrscheinlich, daß man es folgendermaaßen angegriffen, um diesen Werth mit Gewißheit zu entdecken. Man ist nämlich auf die Bedingungen der Aufgabe, oder, welches einerley ist, auf die Gleichungen $4x + 6y = 120$, und $3x + 7y = 190$, wodurch diese Bedingungen anfänglich ausgedrücket worden, zurückgegangen, und hat gesehen, wie die Werthe -30 und $+40$ von x und y diesen Gleichungen zukommen. Erstlich findet man, daß $4x$ in diesem Falle -120, und $6y = 240$ seyn muß. Daher ist $4x - 6y$ so viel, als $-120 + 240$, welches wirklich so groß ist, als 120. Eben so findet man, daß $3x + 7y$ so viel ist, als $-90 + 280$, woraus 190 wird.

Wenn man nun einsieht, wie die Werthe -30 und $+40$ von x und y den Gleichungen $4x + 6y = 120$, und $3x + 7y = 190$ Genüge thun, so entdecket man zugleich, wie sie den Bedingungen der Aufgabe Genüge thun. Denn, weil man sich der Größen $4x$ und $3x$, die an dieser Stelle die Mengen von Wasser bedeuten sollten, welche die erste Quelle gegeben, in der

ersten

ersten und zweyten Operation auf solche Weise bedienet, daß man sie von $6y$ und von $7y$, welche in eben diesen Operationen die von der zweyten Quelle hergegebenen Mengen Wasser ausdrücken, abziehet, so muß man in diesem Falle die erste Quelle so betrachten, als ob sie den Wasserbehältnissen Wasser nähme, anstatt ihnen welches zu geben, wie in dem andern Exempel, und wie man es vorausgesetzt hatte, da man die Bedingungen der Aufgabe ausgedrücket hatte.

Bey dieser Gelegenheit sieht man ein Exempel von der Allgemeinheit der Auflösungskunst, durch welche man bey einer Aufgabe Fälle findet, von welchen man zuvor nicht gedacht hätte, daß sie darinnen enthalten seyn könnten.

LXIII.

Wenn die unbekannten Größen negativ werden, so muß man sie in einer Bedeutung nehmen, welche ihrer Bedeutung in der Ausdrückung der Aufgabe entgegengesetzt ist.

Fast in allen allgemein aufgelöseten Aufgaben hat man Fälle, von eben der Art, wie der vorhergehende ist, gefunden, und man hat daraus allemal geschlossen, daß, wenn der Werth der unbekannten Größe negativ würde, die Größe, welche derselbe ausdrückte, in einer Bedeutung zu nehmen wäre, welche derjenigen, in der man sie bey Ausdrückung der Bedingungen der Aufgabe genommen hatte, entgegengesetzt wäre.

Eben so verhält es sich mit den bekannten Größen.

Was itzo von den unbekannten Größen gesagt worden, das ist auch von den bekannten Größen zu sagen; nämlich, wenn man bey den Anwendungen einer allgemeinen Auflösung, einige gegebene Größen a, b, 2c. negativ annimmt, so bedeutet solches, daß bey der besondern Anwen-

dung diese Größen in einer Bedeutung zu nehmen sind, die derjenigen, in welcher man sie bey der allgemeinen Auflösung genommen, entgegengesetzt ist.

LXIV.

Ein Exempel von dem Gebrauche der bekannten negativ genommenen Größen.

Man will z. E. finden, wieviel in der vorhergehenden Aufgabe beyde Quellen Wasser geben müssen, damit ein Wasserbehältniß von 180 Eimern voll werde, wenn die zweyte Quelle 6 Tage lang Wasser dazu hergiebt, da ihm indessen die erste 3 Tage lang Wasser nimmt, und damit ein Wasserbehältniß von 320 Eimern voll werde, wenn hernach die erste Quelle 3 Tage lang, und die zweyte 4 Tage lang, Wasser dazu hergiebt.

Man darf nur in der allgemeinen Auflösung $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$ setzen. Hierdurch bekömmt man $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, und folglich ist $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, wodurch die Gleichungen $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = 40$, und $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = 50$ entstehen, aus denen man sieht, daß von der ersten Quelle täglich 40 Eimer kommen müssen, es sey nun aus dem Wasserbehältnisse, wie es in der ersten Operation geschieht, oder in dasselbe, wie es in der zweyten geschieht; und daß der Ausguß der andern Quelle täglich 50 Eimer beträgt, welche sie bey beyden Operationen hergiebt. Es war so natürlich sich vorzustellen, daß b bey dieser Anwendung negativ

genom-

genommen werden müßte, und es ist so leicht, sich davon zu versichern, wenn man auf den Gebrauch dieses Buchstabens bey Ausdrückung der Bedingungen der Aufgabe zurückgeht, daß es unnütz wäre, sich mit dem Beweise davon aufzuhalten.

LXV.

Damit die Anfänger leichter lernen, wie die Auflösungen der Aufgaben auf solche Fälle gezogen werden, da die gegebenen Größen in einem der Bedeutung, in welcher sie erst waren genommen worden, entgegengesetztem Verstande genommen werden, so wollen wir noch ein Exempel in einer andern Aufgabe geben. Wir wollen die Aufgabe im XXIV. §. wieder vornehmen, wo die Zusammenkunft zweer Boten gesucht ward, und wir wollen uns bemühen, aus der allgemeinen Auflösung, die Auflösung des folgenden Falles herzuleiten.

Ein ander Exempel von eben demselben Gebrauche der bekannten negativ genommenen Größen.

Zween Boten sind 50 Meilen von einander, der eine z. E. zu Ryssel, und der andere zu Paris. Der erste geht Abends um 8 Uhr von Ryssel nach Paris ab, und legt alle Stunden 4 Meilen zurück. Der andere geht eben denselben Tag vormittage um 11 Uhr von Paris nach Ryssel ab, und legt alle Stunden 3 Meilen zurück. Man fragt, wie weit von Paris sie einander begegnen?

Wenn man das, was hier gesagt wird, mit dem, was in der allgemeinen Aufgabe gesagt worden, vergleicht, so sieht man sogleich, daß der Buchstabe c, welcher den Weg des ersten Bo-

ten in einer gegebenen Zeit ausdrückte, hier negativ seyn muß; weil man in der allgemeinen Auflösung voraussetzte, daß der erste Bote sich von dem andern entfernete, in diesem Falle aber der erste dem andern entgegen kömmt. Hernach sieht man auch, daß der Buchstabe b, welcher die Anzahl der Stunden ausdrückte, die der erste Bote voraus hatte, auch negativ seyn muß, weil er später abgegangen ist.

Man darf also nur in der allgemeinen Formel, $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$, setzen $a = 50, b = -9, c = -4, d = 1, e = 3, f = 1$, so bekömmt man $x = \frac{50 \times 1 \times 3 - 9 \times -4 \times 3}{1 \times 3 + 4 \times 1} = \frac{150 + 108}{3 + 4} = \frac{258}{7} = 36\frac{6}{7}$; woraus man siehet, daß die von Paris und von Ryssel abgegangenen Boten einander angetroffen, nachdem jener $36\frac{6}{7}$ Meilen zurückgelegt hat.

LXVI.

Ein Nutzen der Algebra, welcher sich sehr weit erstrecket, und welcher am besten den Vortheil zeigt, den man davon hat, wenn man, wie wir itzo gethan haben, die Zeichen der allgemeinen gegebenen Größen in den Aufgaben nach Belieben annimmt, ist unter andern dieser, daß man durch die Auflösung einer allgemeinen angenommenen Gleichung zugleich die Auflösungen aller derjenigen Gleichungen bekömmt, in welchen nur die unbekannten Größen eben so geordnet sind, ihre Zeichen und Coefficienten mögen übrigens seyn, wie sie wollen. Z. E. mit den beyden

den Gleichungen $bx+cy=a$ und $ex+fy=d$, welche in dem LVI. §. aufgelöset worden, kann man allezeit zwo Gleichungen vom ersten Grade, sie mögen seyn, welche sie wollen, auflösen, wenn nicht mehr, als zwo unbekannte Größen in denselben vorkommen.

Zwo Gleichungen vom ersten Grade, welche zwo unbekannte Größen haben, können allezeit nach den vorhergehenden aufgelöset werden.

Ich will setzen, man habe z. E. folgende beyde Gleichungen aufzulösen, $mnx=ppy-hhg$, und $mny=p^3-nnx$. Damit man sie nun mit den erstern vergleichen könne, so macht man damit den Anfang, daß man sie also schreibt, $mnx-p^2y=-hhg$, und $nnx+nmy=p^3$, worauf man sie Glied vor Glied mit den beyden Gleichungen $bx+cy=a$, und $ex+fy=d$, vergleicht.

Exempel.

Vergleicht man die erste mit der ersten, und die zweyte mit der zweyten, so bekömmt man $b=mn$, $c=-p^2$, $a=-hhg$, $e=n^2$, $f=mn$, $d=p^3$.

Dieses giebt $cd=-p^5$, $af=-mnhhg$, $ce=-p^2n^2$, $bf=mmnn$, $ae=-h^2n^2g$, $bd=mnp^3$, und folglich $cd-af=-p^5+mnhhg$, $ce-bf=-m^2n^2-p^2n^2$; $ae-bd=-h^2n^2g-mnp^3$.

Wenn man nun diese Werthe in den allgemeinen Formeln $x=\frac{cd-af}{ce-bf}$ . . . und $y=\frac{ae-bd}{ce-bf}$ an die zugehörigen Stellen setzet, so bekömmt man endlich $x=\frac{p^5-mnh^2g}{m^2n^2+p^2n^2}$, und $y=\frac{h^2gn^2+mnp^3}{m^2n^2+p^2n^2}$.

LXVII.

Ein ander Exempel.

Wir wollen nunmehr setzen, man habe folgende Gleichungen, $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2nq}{p-q}$ und $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{qn}{p-q}$. Wenn man die erste in diese Forme $\frac{3mpx}{p-q} - \frac{pp}{p+q} y = - \frac{2nq}{p-q}$ bringt, so bekömmt man, indem man sie mit der allgemeinen Gleichung $bx + cy = a$ vergleicht, $b = \frac{3mp}{p-q}$, $c = - \frac{pp}{p+q}$, $a = - \frac{2nq}{p-q}$; und wenn man die andere mit der Gleichung $ex + fy = d$ vergleicht, so bekömmt man $e = m$, $f = p+q$, $d = \frac{qn}{p-q}$. Wenn man nun diese Werthe in der Formel $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$ an die zugehörigen Stellen setzet, so kömmt folgendes heraus,

$$x = \frac{-\frac{pp}{p+q} \times \frac{qn}{p-q} + \frac{2nq}{p-q} \times \overline{p+q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \overline{p+q}}.$$

Diese Größe nun abzukürzen, mache ich damit den Anfang, daß ich den Zähler und den Nenner des Bruches $\frac{2nq \times \overline{p+q}}{p-q}$ durch $p+q$ vermehre, wodurch derselbe in $\frac{2nq \times \overline{p+q}^2}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$ verwandelt wird. Hierdurch wird der ganze Zähler des Werthes von x also verändert

$-pp$

$\frac{-pp\times qn+2nq\times\overline{p+q}^2}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$, oder $\frac{qn\times(2\times\overline{p+q}^2-pp)}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$

oder $qn\times\frac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$.

Hierauf mache ich mich an den Nenner des Werthes von x, und gebe seinen beyden Theilen einerley Nenner. Hieraus wird ....

$\frac{-p^2\times\overline{p-q}\times m-3mp\times\overline{p+q}^2}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$ ...... oder

$\frac{-mp\times(pp-pq+3\times\overline{p+q}^2)}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$, .. oder endlich

$\frac{-mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$. Durch diese beyden Operationen wird der vorhergehende Werth von x in ....

$$\frac{qn\times\frac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}{-mp\times\frac{\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}$$

verwandelt. Da aber sowohl der Zähler, als auch der Nenner dieses Bruches durch $\overline{p+q}\times\overline{p-q}$ getheilet ist, so lasse ich diesen Theiler weg, und der Werth von x wird ....

$\frac{qn\times\overline{pp+4pq+2qq}}{-mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}$ oder $-\frac{qn\times\overline{pp+4pq+2qq}}{mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}$

oder $-\frac{qn}{mp}\times\frac{pp+4pq+2qq}{4pp+5pq+3qq}$, oder endlich ...

$x=\frac{-nqpp-4npqq-2nq^3}{4mp^3+5mp^2q+3mpqq}$. Setzet man nun

eben

eben dieselben Werthe von a, b, c ꝛc. in der allgemeinen Formel $y=\frac{ae-bd}{ce-bf}$ an die zugehörigen Stellen, so bekömmt man . . . .

$$y=\frac{-\frac{2nq}{p-q}\times m-\frac{3mp}{p-q}\times\frac{qn}{p-q}}{-\frac{pp}{p+q}\times m-\frac{3mp}{p-q}\times\overline{p+q}}.$$

Aus dem Zähler dieser Gleichung mache ich folgendes

$$\frac{-2mnq\times\overline{p-q}-3mpqn}{\overline{p-q}^2},$$

indem ich den Zähler und den Nenner des Bruches $-\frac{2nqm}{p-q}$ durch $p-q$ vermehre. Hierauf kürze ich diese neue Forme ab, und es wird daraus . . . . .

$$\frac{mnq\times\overline{-5p+2q}}{\overline{p-q}^2}.$$

Was den Nenner des Werthes von y anlangt, so wird er, da er mit dem Nenner des Werthes von x einerley ist, eben so abgekürzet, und man bekömmt folglich . . . .

$$y=\frac{mnq\times\frac{2q-5p}{\overline{p-q}^2}}{-mp\times\frac{4pp+5pq+3qq}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}},$$

oder, indem man die gemeinen Theiler $p-q$ weglöschet, und die Abkürzung verrichtet . . . .

$$y=\frac{qn\times\frac{5p-2q}{p-q}}{p\times\frac{4pp+5pq+3qq}{p+q}},$$

woraus, wenn

man,

man, nach den Regeln der Theilung der Brüche, den Theiler $p+q$ oben und den Theiler $p-q$ unten hinsetzt, endlich wird . . . .

$$y = \frac{qn \times \overline{p+q} \times \overline{5p-2q}}{p \times \overline{p-q} \times \overline{4p^2+5pq+3qq}}$$

oder $y = \frac{-2q^3n + 5p^2qn + 3pq^2n}{-2p^2q^2 + 4p^4 + p^3q - 3pq^3}$.

LXVIII.

Eine andere Art, eben dieses Exempel aufzulösen.

Wenn man den Anfang zur Auflösung der in diesem Exempel vorgegebenen Gleichungen damit gemacht hätte, daß man die Brüche aus diesen Gleichungen weggeschafft hätte, so würde die auf folgende Art angestellte Rechnung wegen der Theiler nicht so mühsam gewesen seyn.

Man vermehre erstlich die beyden Hälften der Gleichung $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2qn}{p-q}$, oder $\frac{3mpx}{p-q} - \frac{ppy}{p+q} = -\frac{2nq}{p-q}$, durch $pp-qq$, welches das Product der beyden Theiler $p-q$, $p+q$ ist, so bekömmt man die Gleichung $\overline{3mpp+3mpq} \times x + \overline{ppq-p^3} \times y = -2npq-2nqq$.

Desgleichen vermehre man die beyden Hälften der Gleichung $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{nq}{p-q}$ durch $p-q$, so bekömmt man $\overline{mp-mq} \times x + \overline{pp-qq} \times y = qn$.

Wenn man nun diese beyden neuen Gleichungen mit den beyden allgemeinen Formeln vergleicht, so hat man $b = 3mpp + 3mpq$, $c = ppq - p^3$, $a = -2npq - 2nq^2$, $e = mp - mq$, $f = p^2 - q^2$, $d = qn$.

Hieraus

Hieraus bekömmt man, $cd = p^2q^2n - p^3qn$, $af = -2np^3q - 2np^2q^2 + 2pq^3n + 2nq^4$, $ae = 2nmq^3 - 2nmp^2q$, $bd = 3mnp^2q + 3mnpq^2$; $ce = 2p^3qm - mp^4 - mp^2q^2$; $bf = 3mp^3q + 3mp^4 - 3mpq^3 - 3mp^2q^2$, und folglich

$$cd - af = qnp^3 + 3p^2q^2n - 2npq^3 - 2nq^4$$
$$ce - bf = 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$$
$$ae - bd = 2mnq^3 - 5nmp^2q - 3mnpq^2,$$ welche Gleichungen folgendes geben ....

$$x = \frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$$

und $$y = \frac{2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpqq}{2mppqq - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$$

LXIX.

Vergleichung der beyden vorhergehenden Auflösungen mit einander.

Wenn man nun diese beyden Werthe von x und von y mit denen vergleichet, welche vorher gefunden worden, so sieht man sogleich, ohne einige Schwierigkeit, daß die beyden Werthe von y einerley sind. Was die Werthe von x anlangt, so wird man sehen können, wie der erste mit dem andern einerley seyn kann, wenn man nur bemerket, daß, weil diese beyden Ausdrückungen einander gleich seyn müssen, der Zähler $qnp^3 + 3nppqq - 2npq^3 - 2nq^4$ der andern nothwendig den Zähler $-qnpp - 4pq^2n - 2q^3n$ der ersten auf eben die Art in sich halten muß, wie der Nenner $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ der andern den Nenner $4p^3m + 5p^2qm + 3mpq^2$ der ersten in sich hält. Wenn man sich nun aber die Mühe nimmt, den andern Zähler durch den ersten zu theilen, so findet man wirklich eben denselben

Quo-

Quotienten $p - q$, welchen man findet, wenn man den andern Nenner durch den ersten theilet: das ist, der Ausdruck . . . .
$\frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$ wird verwandelt in . . . .
$\frac{\overline{p-q} \times \overline{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}}{\overline{p-q} \times 4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$, oder in . . .
$\frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$, indem man die gemeinen Theiler $p - q$ wegläßt.

LXX.

Auf die Art, auf welche wir itzo unter zween Werthen von x den am meisten zusammengesetzten auf den einfachsten gebracht haben, konnte man leicht fallen, da man diese Werthe alle beyde wußte: aber wenn einem nur der am meisten zusammengesetzte wäre bekannt gewesen, und man hätte ihn wollen einfacher ausdrücken, so würde man viel mehr Schwierigkeit gefunden haben, weil man nicht gewußt hätte, durch was für eine Größe man den Zähler und den Nenner des Bruches hätte theilen sollen. Da es nun ein Fehler in der Auflösung einer Aufgabe wäre, wenn man von x einen Werth angäbe, der sich noch verkürzen ließe, so muß man eine Methode suchen, einen jeden Bruch, welcher sich verkürzen läßt, zu verkürzen, oder, welches auf eines hinausläuft, man muß eine Methode suchen, nach welcher man den größten gemeinen Theiler finden kann, welchen zwo gegebene Größen haben können.

Um

Um von dem einfachsten auf das zusammengesetzteste fortzugehen, wollen wir erstlich setzen, daß diese zwo Größen nur Zahlen wären. Man soll zum Exempel den größten gemeinen Theiler der Zahlen 637 und 143 suchen, oder, welches eben dasselbe ist, man soll den Bruch $\frac{637}{143}$ auf das kürzeste ausdrücken.

Wenn man nun erstlich 637 durch 143 theilet, so kömmt 4 zum Quotienten heraus, und 65 ist der Rest, das ist, der Bruch $\frac{637}{143}$ wird in $4 + \frac{65}{143}$ verwandelt; daher es denn nunmehr nur darauf ankömmt, daß man den Bruch $\frac{65}{143}$ auf das kürzeste ausdrücke, oder, welches einerley ist, daß man eine Zahl suche, welche der größte gemeine Theiler der Zahlen 143 und 65 sey. Denn es ist klar, daß, wenn diese Zahl gefunden ist, sie auch der größte gemeine Theiler der Zahlen 637 und 143 seyn muß; weil man den Bruch $\frac{65}{143}$ nicht auf seinen kürzesten Ausdruck bringen kann, ohne zugleich $4 + \frac{65}{143}$ oder $\frac{637}{143}$ auf seinen kürzesten Ausdruck zu bringen.

Da die beyden Zahlen 143 und 65, an welche wir uns itzo machen wollen, einfacher sind, als die beyden erstern, 637 und 142, so sehe ich, daß die Schwierigkeit vermindert ist, und daß, wenn man wieder so wie vorhin verfährt, man sie noch mehr vermindern wird. Anstatt des abzukürzenden Bruches $\frac{65}{143}$ schreibe ich $\frac{143}{65}$, nicht, weil ich etwan diese Brüche für einerley hielte, sondern, weil man den einen nicht abkürzen kann, daß nicht der andere auf eben diese Art abgekürzet würde. Damit nun $\frac{143}{65}$ abgekürzet werde,

so

so theile ich 143 durch 65, worauf ich 2 zum Quotienten bekomme, und 13 übrig bleibt. Man darf also nur noch, aus eben diesem Grunde, den größten gemeinen Theiler von 13 und von 65 suchen. Denn man sieht, daß der größte gemeine Theiler dieser beyden Zahlen auch der größte gemeine Theiler von 143 und von 65 seyn muß, weil der Bruch $\frac{143}{65}$ in $2 + \frac{13}{65}$ verwandelt wird.

Nun ist aber 13 selbst der größte gemeine Theiler von 13 und von 65, weil es 65 vollkommen theilet. Folglich ist 13 auch der größte gemeine Theiler von 143 und von 65, und folglich ist diese Zahl auch der größte gemeine Theiler der vorgegebenen Zahlen 637, 143. Es ist auch 637 wirklich 49×13, und 143 ist 11×13, woraus man bekömmt $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$; ein Bruch, welcher nicht kürzer ausgedrücket werden kann.

LXXI.

Man kann sich leicht versichern, daß die Methode, welcher man in dem vorhergehenden Exempel gefolget ist, bey allen Zahlen, sie mögen seyn, welche sie wollen, angebracht werden kann. Wenn man überhaupt zwo Zahlen, A und B, hat, und der Quotient der Theilung der erstern durch die letztere a, und der Rest C ist, so wird es nur darauf ankommen, daß man den größten gemeinen Theiler von B und von C findet; wobey man setzet, daß b der Quotient von B durch C, und D der Rest ist. Alsdenn muß man nur noch den größten gemeinen Theiler

Allgemeine Methode, den größten gemeinen Theiler zwoer Zahlen zu finden.

von *C* und von *D* finden, das ist, man muß *C* durch *D*, und durch den Rest wiederum *D* theilen. Wenn man nun so von Theilung zu Theilung fortgehet, bis man zwo Zahlen bekömmt, wovon die kleinste etliche mal in der größten ohne Rest enthalten ist, so ist diese Zahl, welche in der andern so enthalten ist, der größte gemeine Theiler der beyden ersten Zahlen *A* und *B*.

Diese Regel gründet sich in aller ihrer Allgemeinheit, wie in dem vorhergehenden Exempel, darauf, daß der Bruch $\frac{A}{B}$, da er $a + \frac{C}{B}$ wird, nicht abgekürzet werden kann, wenn nicht $\frac{C}{B}$ abgekürzet wird, daß $\frac{C}{B}$ nicht anders abgekürzet werden kann, als auf eben die Art, wie $\frac{B}{C}$, und daß $\frac{B}{C}$, weil es so viel ist, als $b + \frac{D}{C}$, nicht abgekürzet werden kann, als wenn $\frac{D}{C}$ abgekürzet wird, und so ferner.

LXXII.

Nun wollen wir sehen, was für Veränderungen man bey dieser Methode vornehmen muß, damit sie sich bey den algebraischen Größen anwenden lasse. Um mehrerer Deutlichkeit willen wollen wir sogleich ein Exempel vornehmen.

Gesetzt, man solle den größten gemeinen Theiler der Größen $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ und $4aa - 5ba + bb$ finden. Nach der vorhergehenden Methode müßte man die erste von diesen beyden Größen durch die zweyte theilen: aber da die Theilung nicht geschehen kann, weil

das

das erste Glied $3a^3$ der zu theilenden Größe das erste Glied des Theilers nicht vollkommen in sich hält, so vermehre ich die ganze erste Größe durch 4, und überlege, daß, da 4 kein Theiler der andern Größe $4aa - 5ba + bb$ ist, die Größen $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$, und $4aa - 5ba + bb$, eben denselben gemeinen Theiler haben müssen, welchen die Größen $3a^3 - 3baa + bba - b^3$, und $4aa - 5ba + bb$ haben.

Hierauf theile ich, nach den vorhergehenden Regeln, $12a^3 - 12ba^2 + 4b^2a - 4b^3$ durch $4a^2 - 5ba + bb$, da ich denn $3a$ zum Quotienten, und $3baa + bba - 4b^3$ zum Reste bekomme. Nun sollte man, nach eben diesen Regeln, $4a^2 - 5ba + bb$ durch $3baa + bba - 4b^3$ theilen: aber, da die Theilung dieser Größen nicht geschehen kann, ohne dieselben dazu vorzubereiten, so bemerke ich erstlich, daß b, da es allen Gliedern der letzten Größe gemein ist, den Gliedern der andern Größe aber nicht, kein Theil des größten gemeinen Theilers dieser Größen seyn kann. Ich nehme es also aus allen Gliedern dieser zweyten Größe weg, und setze an derer Stelle $3aa + ba - 4b^2$. Ich bemerke alsdenn, daß, wenn man die erste Größe $4aa - 5ba + bb$ durch 3 vermehret, als welche Zahl kein Theiler von $3aa + ba - 4b^2$ ist, die Theilung möglich seyn wird. Ich verrichte also diese Theilung von $12aa - 15ab + 3bb$ durch $3aa + ba - 4bb$, da ich denn 4 zum

Quotienten bekomme, und $-19ab+19bb$ übrig bleibt.

Man darf also nun nur noch den größten gemeinen Theiler von $3aa+ba-4bb$, und von $-19ab+19bb$ suchen. Da man, dieses zu verrichten, die erste von diesen beyden Größen durch die andere theilen müßte, und da man, um die beyden ersten Glieder dieser Größen theilen zu können, die erste durch $19b$ vermehren müßte, welches ein vollkommener Theiler der andern ist, so nehme ich diesen Theiler aus der andern Größe weg, da denn $-a+b$ daraus wird.

Aber der größte gemeine Theiler von $3aa+ba-4bb$, und von $-a+b$, ist $-a+b$ selbst, weil eine dieser beyden Größen durch die andre vollkommmen kann getheilet werden. Es ist also $-a+b$ der größte gemeine Theiler von $3aa+ba-4bb$, und von $-19ab+19bb$; folglich ist es auch der größte gemeine Theiler von $12aa-15ab+3bb$ und von $3aa+ba-4bb$; folglich ist er es auch von $4aa-5ba+bb$, und von $3baa+bba-4b^3$, wie auch von $12a^3-12baa+4bba-4b^3$, und von $4aa-5ba+bb$. Folglich ist er endlich auch der größte gemeine Theiler der vorgegebenen Größen $3a^3-3baa+bba-b^3$, und $4aa-5ba+bb$.

LXXIII.

Nun kann man leicht sehen, daß man fast auf eben diese Art die größten gemeinen Theiler jeglicher andern Größen finden könnte. Der einzige Grundsatz, welchen man noch bey dieser

Unter-

Untersuchung zu der im LXXI. §. angezeigten Methode hinzuthun muß, ist dieser, daß jegliche zwo Größen A und B ihren größten gemeinen Theiler behalten, wenn man eine von diesen beyden Größen, z. E. A, durch eine Größe, welche keinen Theiler mit B gemein hat, vermehret, oder theilet.

Allgemeine Methode, den größten gemeinen Theiler algebraischer Größen zu finden.

Man kann das Verfahren nach der allgemeinen Methode, die größten gemeinen Theiler zu finden, also ausdrücken. Es seyn A und B die beyden vorgegebenen Größen. Zuerst muß man diese beyden Größen nach einem von denen Buchstaben, welche sie mit einander gemein haben, es sey, welcher es wolle, ordnen. Hernach muß man sehen, durch welche Größe m man A vermehren muß, damit diejenigen Glieder, in welchen der Buchstabe, nach welchem man die Größe A geordnet hat, auf die höchste Potenz erhöhet ist, durch die Glieder der Größe B, in welchen eben dieser Buchstabe auf die höchste Potenz erhöhet ist, können getheilet werden. Wenn dieser Vermehrer m keinen Theiler mit B gemein hat, so vermehret man mit demselben das A: aber wenn er einen n mit B gemein hat, so schafft man diesen gemeinen Theiler sowohl aus m, als aus B weg, und vermehret A nur durch $\frac{m}{n}$, woraus eine neue Größe C entstehet, welche man an die Stelle des A setzt. Desgleichen nimmt man auch an statt des B die Größe D, welche herauskömmt, wenn man B durch den Theiler n, welchen es mit m gemein hat, theilet.

Wenn dieses geschehen ist, so theilet man C durch D, und wenn diese Theilung vollkommen ist, so ist D der gesuchte größte gemeine Theiler von A und B. Aber wenn eine Größe E übrig bleibt, so macht man mit D und E eben das, was man mit A und B gemacht hat, und so weiter, bis man auf zwo Größen kömmt, welche einander vollkommen theilen. Wenn man bis dahin gekommen ist, so ist diejenige von diesen beyden Größen, welche in der andern ohne Rest enthalten ist, der gesuchte größte gemeine Theiler.

Hierbey ist zu merken, daß, wenn man, ehe man diejenige Verrichtung unternimmt, von welcher itzo die Methode gezeigt worden, in einer von den vorgegebenen Größen A oder B eine Größe wahrnimmt, welche ein vollkommener Theiler derselben, nicht aber der andern, ist, man vor allen Dingen diesen Theiler wegschaffen muß, damit die Rechnung desto kürzer werde.

Daß sich die Anfänger die Anwendung dieser Methode desto geläufiger machen können, habe ich folgende Exempel beygefüget.

LXXIV.

Erstes Exempel.

Es seyn die Größen, $qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$, und $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$, von welchen wir (im LXIX. §.) den gemeinen Theiler $p - q$ nicht würden gefunden haben, wenn wir nicht zum voraus gewußt hätten, daß die Theilung der ersten von diesen beyden Größen durch die andere eben den Quotient geben müßte, welcher herauskömmt, wenn man

man die Größe $-nqp^2 - 4pq^2n - 2nq^3$ durch die Größe $4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2$ theilet.

Wenn man nun diese beyden Größen verkürzen will, ohne eine andere Methode dabey zu gebrauchen, als die vorhergehende, so muß man erstlich qn, welches alle Glieder der ersten von diesen beyden Größen mit einander gemein haben, und welches nicht in der andern Größe enthalten ist, wegbringen. Desgleichen muß man auch pm wegschaffen, als welches alle Glieder der andern Größe mit einander gemein haben, und welches in der ersten nicht enthalten ist. Wenn dieses geschehen ist, so kömmt es darauf an, den größten gemeinen Theiler der Größen (A) $-4p^3 - p^2q + 2pq^2 + 3q^3$ und (B) $p^3 + 3ppq - 2pq^2 - 2q^3$ zu finden.

Wenn ich nun A durch B theile, so bekomme ich -4 zum Quotienten, und der Rest (C) ist $11p^2q - 6pq^2 - 5q^3$. Da man nun B durch $11q$ vermehren müßte, damit das erste Glied von B durch das erste Glied von C getheilet werden könnte, und da q in allen Gliedern von C enthalten ist, so vermehre ich B nur durch 11, und theile C durch q, da ich denn hernach nur die beyden Größen (D) $11p^3 + 33p^2q - 22pq^2 - 22q^3$ und (E) $11p^2 - 6pq - 5q^2$ mit einander zu vergleichen habe.

Ich theile die erste durch die andere, und bekomme zum Quotienten p, und der Rest (F) ist $39p^2q - 17pq^2 - 22q^3$. Da man nun E durch $39q$ vermehren sollte, damit das erste

Glied der Größe E durch das erste Glied dieser neuen Größe F könnte getheilet werden, und da alle Glieder von F das q gemein haben, so vermehre ich E nur durch 39, und theile das herauskommende Product (G) $429p^2 - 234pq - 195q^2$ durch (H) $39p^2 - 17pq - 22q^2$. Der Quotient ist 11, und der Rest (I) ist $-47pq + 47q^2$.

Damit man nun hierauf H durch I theilen könne, so sollte man alle Glieder desselben durch $47q$ vermehren. Aber diese Größe ist ein Theiler von I. Ich bringe ihn also aus I weg, und es bleibt mir $q - p$ übrig, welches ich zum Theiler der Größe $39p^2 - 17pq - 22q^2$ brauchen muß. Nun geschieht aber die Theilung vollkommen; folglich ist $q - p$ der gesuchte größte gemeine Theiler der vorgegebenen Größen.

LXXV.

Zweytes Exempel. Man soll ferner den größten gemeinen Theiler der beyden Größen $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$, und $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$ finden. Wenn ich diese beyden Größen nach dem Buchstaben a ordne, so bekomme ich $2aa + ba - ca - 3bb - 4bc - cc$, und $2aa + 9ca - 5ba - 12bb + 8bc + 4cc$, oder ($A$) $2aa + \overline{b - c} \times a - 3bb - 4bc - cc$, und ($B$) $2aa + \overline{9c - 5b} \times a - 12bb + 8bc + 4cc$.

Wenn ich die erste von diesen beyden Größen durch die andere theile, so bekomme ich 1 zum Quotienten und der Rest (C) ist $\overline{6b - 10c}$

$\times a +$

$\times a+9bb-12bc-5cc$. Ich sehe, daß ich, um B durch diese Größe theilen zu können, das B vorher durch $3b-5c$ vermehren sollte. Aber ehe ich dieses thue, so versuche ich die Theilung des C durch $3b-5c$. Sie geht an, und giebt mir zum Quotienten (D) $2a+3b+c$. Ich darf also nur noch den größten gemeinen Theiler von B und D suchen. Aber B läßt sich durch D vollkommen theilen. Folglich ist D, oder $2a+3b+c$, der gesuchte größte gemeine Theiler von $ab+2aa-3bb-4bc-ac-cc$ und von $9ac+2aa-5ab+4cc+8bc-12bb$. Die erste von diesen beyden Größen ist wirklich das Product von $2a+3b+c$ durch $a-b-c$, und die andere ist das Product von $2a+3b+c$ durch $a-4b+4c$, und diese beyden Größen, $a-b-c$ und $a-4b+4c$, haben weiter keinen gemeinen Theiler.

LXXVI.

Drittes Exempel.

Es seyn die beyden Größen, (A) $\overline{dd-cc}\times a^2+c^4-ddcc$ und (B) $4da^2-\overline{2cc+4cd}\times a+2c^3$, nach dem Buchstaben a geordnet. Ich verwandle erstlich B in (C) $2da^2-\overline{cc+2cd}\times a+c^3$, indem ich aus allen Gliedern dieser Größe B den Theiler 2 wegschaffe, welchen sie mit A nicht gemein hat. Ich vermehre hierauf A durch $2d$, um die Theilung möglich zu machen, durch welche ich zum Quotienten $\overline{dd-cc}$, und zum Reste (D) $\overline{dd-cc}\times\overline{cc+2cd}\times a-\overline{dd-cc}\times c^3+2dc^4-2d^3cc$ bekomme. Wenn man nun diese Größe

zum Theiler bey C gebrauchen wollte, so müßte man vorher C durch $\overline{dd-cc}\times\overline{cc+2cd}$ vermehren, damit das erste Glied von B die Theilung verstattete.

Aber ehe ich dieses thue, muß ich sehen, ob nicht etwan $\overline{dd-cc}\times\overline{cc+2cd}$ ein Theiler, oder ein Vielfaches von irgend einem Theiler des D sey. Dieses zu erfahren, suche ich den größten gemeinen Theiler von $\overline{dd-cc}\times\overline{cc+2cd}$ und $-\overline{dd-cc}\times c^3+2dc^4-2d^3cc$, das ist, von $ddcc-c^4+2cd^3-2c^3d$ und $-ddc^3+c^5+2dc^4-2d^3cc$. Aber ich sehe sogleich, daß die andere von diesen Größen nichts anders ist, als das Product der ersten durch $-c$, und daß also die Größe D das Product von $\overline{dd-cc}\times\overline{cc+2dc}$ durch $a-c$ ist. Anstatt also C durch $\overline{dd-cc}\times\overline{cc+2dc}$ zu vermehren, theile ich D durch diese Größe, da denn (E) $a-c$ herauskömmt. Hiervon und von C muß ich den größten gemeinen Theiler suchen. Nun aber theilet $a-c$ das C vollkommen; folglich ist $a-c$ der gesuchte größte gemeine Theiler.

LXXVII.

Eine andere Art, Uebrigens entdecket man, wenn man nur eine geringe Fertigkeit im Rechnen besitzet, oft den größten gemeinen Theiler zwoer Größen leichter, als man ihn durch die itzt erklärte allgemeine Methode findet. Z. E. wenn die beyden vorhergehenden Größen $\overline{dd-cc}\times aa+c^4-ddcc$,

$ddcc$, und $\overline{4daa - 2cc + 4cd} \times a + 2c^3$, nach dem Buchstaben d geordnet, und folglich also geschrieben sind, $\overline{aa - cc} \times dd + c^4 - aacc$, und $\overline{4aa - 4ca} \times d + 2c^3 - 2c^2a$, so wird man leicht gewahr, daß $aa - cc$ ein Theiler der ersten, und $c - a$ ein Theiler der andern ist. Aber $aa - cc$ ist durch $c - a$ theilbar; folglich ist $c - a$ ein Theiler der beyden vorgegebenen Größen. Ich theile also beyde durch $c - a$, und bekomme zu ihren Quotienten $\overline{cc - dd} \times c + a$, und $-4ad + 2cc$. Man sieht gar leicht, daß diese beyden Größen weiter keinen gemeinen Theiler haben. Folglich war $c - a$ oder $a - c$ der größte gemeine Theiler der vorgegebenen Größen.

eben dieses Exempel aufzulösen.

LXXVIII.

Man soll itzo den größten gemeinen Theiler der beyden Größen $6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc$, und $9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3$ suchen. Erst nehme ich aa aus allen Gliedern der ersten, und $3b$ aus allen Gliedern der andern Größe weg. Hierdurch bekomme ich $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$, und $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$. Aber da die zweyte von diesen beyden Größen kein b in sich hat, so schließe ich, daß, wenn sie einen Theiler mit der ersten gemein hat, sie ihn mit jeden ihrer beyden Theile $6a^3 - 4acc$ und $15a^2b - 10bcc$ gemein haben muß, und auch diese beyden Theile zusammen eben denselben gemeinen Theiler haben müssen. Man sieht aber sogleich, daß $3aa - 2cc$ der gemeine Theiler dieser

Andere Größen, derer größter gemeiner Theiler, ohne die vorhergehende Methode, gefunden wird.

ser beyden Theile ist; folglich ist es der größte gemeine Theiler der vorgegebenen Größen, woferne sie einen haben. Wenn man nun diese beyden Größen damit theilet, so sieht man, daß es sie wirklich theilet, und daß es folglich ihr größter gemeiner Theiler ist.

LXXIX.

Wenn drey unbekannte Größen in einer Aufgabe sind, so muß man drey Gleichungen haben, um dieselbe aufzulösen.

Aus dem vorhergehenden hat man deutlich genug gesehen, daß man, um die beyden unbekannten Größen, welche in einer Aufgabe enthalten sind, zu finden, zwo Gleichungen haben muß. Hieraus kann man sich leicht vorstellen, daß, wenn drey unbekannte Größen in einer Aufgabe sind, man drey Gleichungen haben müsse, und so ferner. Was die Art anlangt, wie man die unbekannten Größen in diesen Gleichungen absondert, so wird es auch nicht schwer seyn, dieselbe zu begreifen, nachdem man gesehen hat, wie man es bey denen macht, welche nur zwo unbekannte Größen haben.

Wie man die unbekannten Größen in diesen Gleichungen absondert.

Denn wenn man drey Gleichungen hat, wovon jede die drey unbekannten Größen x, y, z, in sich hält, und aus jeder von diesen Gleichungen einen Werth von x herleitet, der durch bekannte und durch die beyden andern unbekannten Größen dieser Gleichungen, y, z, ausgedrückt sey, so ist klar, daß, wenn man diese verschiedenen Werthe von x einander gleich setzet, man zwo neue Gleichungen bekömmt, welche nur noch die beyden unbekannten Größen, y und z enthalten, und mit welchen es folglich eben die Bewandniß hat, wie mit denen, von welchen wir geredet haben. Mit den

Gleichungen, worinne vier, fünf ꝛc. unbekannte Größen vorkämen, würde es eben also beschaffen seyn.

Da diese itzt angezeigte allgemeine Methode bey der Ausübung Schwierigkeiten haben kann, so wollen wir die Anwendung derselben in der folgenden Aufgabe zeigen, in welcher die größte Verwickelung vorkommen wird, welche in den Gleichungen vom ersten Grade mit drey unbekannten Größen Statt findet.

LXXX.

Eine Aufgabe, in welcher drey unbekannte Größen vorkommen.

Man weis, wieviel drey Magazine, da in jedem dreyerley Arten Getreyde sind, jedes besonders, gekostet haben. Man weis ferner, wieviel Maaß von jeder dieser dreyerley Arten Getreyde in jedem Magazine sind; und man fragt, wieviel ein Maaß von jedem Getreyde kostet?

Es seyn a, b, c, die Zahlen der Maaße jeder Art des Getreydes, welches in dem ersten Magazine enthalten ist, und d sey der Preis dieses Magazins.

Es seyn ferner e, f, g, die Maaße eben dieser Getreydearten, welche in dem zweyten Magazine enthalten sind, und der Preis desselben sey h.

Es seyn noch ferner i, k, l, die Maaße eben dieser Getreydearten, welche in dem dritten Magazine enthalten sind, und der Preis dieses Magazins sey m.

Es seyn endlich x, y, z, die Preise eines Maaßes von einer jeden Art.

Es ist klar, daß die Menge der ersten in dem Magazine d enthaltenen Getreydeart ax kosten

muß,

muß, weil a die Zahl der Maaße dieser Getreydeart, und x der Preis eines Maaßes derselben ist. Eben so muß auch die Menge der zweyten in eben diesem Magazine enthaltenen Getreydeart by, und die Menge der dritten ebenfalls in diesem Magazine enthaltenen Getreydeart cz kosten. Wenn man also diese Preise zusammensetzet, um sie dem Preise d dieses Magazins gleich zu setzen, so bekömmt man die Gleichung

$$ax + by + cz = d.$$

Eben so macht man die Gleichungen, $ex + fy + gz = h$, $ix + ky + lz = m$, indem man die erwähnten Bedingungen in Ansehung der beyden andern Magazine ausdrücket.

Nun kömmt es darauf an, daß man aus diesen Gleichungen die Werthe von x, y, z herleite. Man zieht also zuerst den Werth von x aus der ersten Gleichung, welcher ist $\frac{d - by - cz}{a}$, und wenn man diesen Werth von x demjenigen gleich setzet, welchen man aus der zweyten Gleichung herleitet, so bekömmt man die Gleichung

$$\frac{d - by - cz}{a} = \frac{h - fy - gz}{e}.$$

Setzet man hernach eben diesen Werth . . . . $\frac{d - by - cz}{a}$ demjenigen gleich, welchen man aus der dritten Gleichung herleitet, so bekömmt man die Gleichung $\frac{d - by - cz}{a} = \frac{m - ky - lz}{i}$.

Aus der ersten von diesen beyden Gleichungen mit y und z ziehet man $de - bey - cez = ah$

$= ab - afy - agz$, oder ....

$z = \frac{de - ab + afy - bey}{ce - ag}$.

Aus der andern zieht man $di - biy - icz = am - aky - alz$ oder ....

$z = \frac{di - am + aky - biy}{ci - al}$.

Wenn man diese beyden Werthe einander gleich setzet, so ist es klar, daß man eine Gleichung bekommen wird, in welcher keine unbekannte Größe, ist als y, und daß, wenn man diese Gleichung auflöset, y bekannt werden wird. Weil die Rechnungen, die zu dieser Verrichtung gehöreten, gar weitläuftig seyn würden, so will ich zeigen, wie man sie vermeiden kann, indem man sich gewisser Abkürzungen bedienet, auf welche die ersten Analysten, wenn sie große Rechnungen zu machen gehabt haben, leicht haben fallen können.

LXXXI.

Diese Abkürzungen bestehen darinne, daß man neue Buchstaben an die Stelle verschiedener aus bekannten Größen zusammengesetzten Glieder setzet.

Wie man die Berechnungen durch besondere Benennungen abkürzet.

Anstatt $de - ab$ setze ich .... α

Anstatt $af - be$ .... β

Anstatt $ce - ag$ .... γ

Anstatt $di - am$ .... δ

Anstatt $ak - bi$ .... ε

Anstatt $ci - al$ .... ϕ

Durch diese neuen Benennungen werden die vorhergehenden Gleichungen also ausgedrückt,

$z =$

$z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$, und $z = \frac{\delta + \varepsilon y}{\phi}$, welche geben $\alpha\phi + \beta\phi y = \delta\gamma + \gamma\varepsilon y$, woraus man bekömmt $y = \frac{\alpha\phi - \delta\gamma}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}$. Wenn man nun hernach diesen Werth von y in einem von den beyden vorhergehenden Werthen von z, z. E. in dem ersten, an die Stelle des y setzet, so bekömmt man $z = \frac{\alpha + \frac{\beta\alpha\phi - \beta\gamma\delta}{\gamma\varepsilon - \phi\beta}}{\gamma}$, woraus durch die Entwickelung wird $z = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \phi\beta}$.

Wenn dieses geschehen ist, so setzet man diese Werthe von y, und von z, in einen von den vorhergehenden Werthen von x, z. E. in $\frac{d - cz - by}{a}$, und so bekömmt man

$$x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi} - \frac{b}{a} \times \frac{\alpha\phi - \delta\gamma}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}$$

oder $x = \frac{d \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\phi} - c \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} - b \times \overline{\alpha\phi - \delta\gamma}}{a \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\phi}}$.

LXXXII.

Exempel der vorhergehenden Aufgabe in Zahlen.

Damit wir nun die Anwendung dieser Methode zeigen, so wollen wir setzen, in dem ersten Magazine wären 30 Maaß Roggen, 20 Maaß Gerste, und 10 Maaß Weizen, und es hätte 230 Thaler gekostet.

In dem zweyten Magazine wären 15 Maaß Roggen, 6 Maaß Gerste, und 12 Maaß Weizen, und es hätte 138 Thl. gekostet.

In

In dem dritten Magazine wären 10 Maaß Roggen, 5 Maaß Gerste und 4 Maaß Weizen, und es hätte 75 Thl. gekostet.

Damit man nun erfahre, wieviel das Maaß Roggen, das Maaß Gerste und das Maaß Weizen kostet, so muß man machen
$a=30, b=20, c=10, d=230$
$e=15, f=6, g=12, h=138$
$i=10, k=5, l=4, m=75$. Hieraus ergiebt sich $de-ah=\alpha=-690, af-be=\beta=-120, ce-ag=\gamma=-210, di-am=\delta=50, ak-bi=\varepsilon=-50, ci-al=\Phi=-20$. Wenn man hierauf diese Werthe in den Größen $\alpha\Phi-\gamma\delta, \gamma\varepsilon-\beta\Phi, \alpha\varepsilon-\beta\delta$ an die zugehörigen Stellen setzet, so bekömmt man 24300, 8100, 40500 für diese drey Größen. Dieses giebt folglich

$$y=\frac{24300}{8100}=3, \quad z=\frac{40500}{8100}=5$$

und $x=\frac{230\times 8100-10\times 40500-20\times 24300}{30\times 8100}=4$

Folglich gilt das Maaß Roggen . . . . 4 Thl.
Das Maaß Gerste . . . . 3 Thl.
Und das Maaß Weizen . . . . 5 Thl.

LXXXIII.

Alle Aufgaben vom ersten Grade mit drey unbekannten Größen, können, wenn sie in Gleichungen gebracht werden, in

Da die Gleichungen der vorhergehenden Aufgabe die allgemeinsten vom ersten Grade mit drey unbekannten Größen sind, weil in jeder die drey unbekannten Größen mit unbestimmten bekannten Größen verbunden sind, so folget daraus, daß eine jede Aufgabe vom ersten Grade mit drey unbe-

der vorhergehenden Aufgabe begriffen werden.

unbekannten Größen in der vorhergehenden enthalten seyn muß, sobald sie analytisch ausgedrücket wird. Um hiervon ein Exempel zu geben, wollen wir folgende Aufgabe vornehmen.

Man hat drey aus verschiedenen Metallen zusammengeschmelzete Klumpen. Das Pfund des ersten enthält

	Unzen	Unzen	Unzen
. . . . . .	7 Silber	3 Kupfer	6 Zinn,
des zweyten	12	3	1
des dritten	4	7	5

Man fragt, wieviel man von jeglichem Klumpen nehmen muß, wenn man einen vierten Klumpen machen will, welcher enthalten soll

Unzen	Unzen	Quentchen	Unzen	Quentchen
8 Silber	3	6 Kupfer	4	2 Zinn?

Es seyn x, y, z die Zahlen der Unzen, welche man von einem jeden dieser Metallklumpen nehmen muß.

Es ist klar, daß $\frac{7}{16}x$ die Menge des Silbers seyn muß, welches in diesem Stücke von dem ersten Klumpen enthalten ist, ...
daß . . . . $\frac{12}{16}y$ die Menge des Silbers seyn muß, welches in dem Stücke von dem zweyten Klumpen enthalten ist, ...
und daß . . . . . $\frac{4}{16}z$ die Menge des Silbers seyn muß, welches in dem Stücke von dem dritten Klumpen enthalten ist.

Wenn man nun diese drey Größen zusammensetzet, so muß ihre Summe 8 Unzen Silber

seyn.

seyn. Man bekömmt also die Gleichung $\frac{7}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{4}{16}z = 8$ oder $7x + 12y + 4z = 128$.

Die Menge des Kupfers, welches man aus diesen drey Metallklumpen bekömmt, wird seyn $\frac{3}{16}x$, $\frac{3}{16}y$ und $\frac{7}{16}z$ und die Summe desselben soll seyn 3 Unzen 6 Quentchen oder $\frac{15}{4}$ Unzen. Dieses giebt $\frac{3}{16}x + \frac{3}{16}y + \frac{7}{16}z = \frac{15}{4}$ oder $3x + 3y + 7z = 60$.

So muß auch die Menge des Zinns, welches man aus diesen drey Metallklumpen bekömmt, seyn $\frac{6}{16}x$, $\frac{1}{16}y$, $\frac{5}{16}z$, wovon die Summe seyn soll 4 Unzen 2 Quentchen oder $4\frac{1}{4}$ Unzen; folglich ist $\frac{6}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{5}{16}z = 4 + \frac{1}{4}$ oder $6x + y + 5z = 68$.

Nun darf man nur diese drey Gleichungen auflösen. Und diese Auflösung wird man leicht aus der vorhergehenden herleiten können, wenn man machet,

$a = 7, b = 12, c = 4, d = 128$
$e = 3, f = 3, g = 7, h = 60$
$i = 6, k = 1, l = 5, m = 68$;

woraus man finden wird

$de - ha = \alpha = -36$; $af - be = \beta = -15$; $ce - ag = \gamma = -37$,
$di - am = \delta = 292$; $ak - bi = \varepsilon = -65$;
$ci - al = \varphi = -11$.

Wenn man hernach diese Werthe in den Größen $\alpha\varphi - \gamma\delta$, $\gamma\varepsilon - \beta\varphi$, $\alpha\varepsilon - \beta\delta$ an die gehö-

rigen Stellen setzet, so bekömmt man 11200, 2240, 6720 für diese drey Größen, welches also geben wird $y = \frac{11200}{2240} = 5$, $z = \frac{6720}{2240} = 3$ und $x = \frac{128 \times 2240 - 4 \times 6720 - 12 \times 11200}{7 \times 2240} = 8$, das ist, man muß 8 Unzen von dem ersten, 5 Unzen von dem zweyten, und 3 Unzen von dem dritten Klumpen nehmen, um den verlangten Klumpen daraus zu machen.

Anfangsgründe der ALGEBRA.

Zweyter Theil.

Von der Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade.

Wir haben nunmehr die Aufgaben vom ersten Grade hinlänglich abgehandelt, und können füglich zu den Aufgaben von den übrigen Graden fortgehen, besonders zu den Aufgaben vom zweyten Grade, welche wir in diesem zweyten Theile untersuchen wollen. Was die Art, die Bedingungen derselben analytisch auszudrücken, anlanget, so ist sie für dieselben eben so, wie für die Aufgaben vom ersten Grade. Nur allein zur Auflösung der

Gleichungen, zu denen man gelanget, wenn man die Aufgaben ausdrücket, werden verschiedene Methoden, nach den verschiedenen Graden dieser Gleichungen, erfordert. Ein Exempel davon kann man in der folgenden Aufgabe sehen, welche bey ihrer Allgemeinheit Aufgaben von allen Graden in sich hat, und sich in Ansehung des am meisten zusammengesetzten Grades eben so leicht analytisch ausdrücken läßt, als in Ansehung des einfachsten.

I.

Eine Aufgabe, welche bey ihrer Allgemeinheit Aufgaben von allen Graden in sich hält.

Es hat einer eine Summe a in einer Handlung angelegt, worinnen er verliert. Er will gleich im ersten Jahre wieder heraustreten: da er aber die Gelegenheit dazu versäumet hat, und eher keine wieder finden kann, als im zweyten oder dritten, oder überhaupt im $n$ten Jahre, so findet er, daß die Summe um die Größe b kleiner geworden ist, als sie nach dem ersten Jahre war. Man fragt, wieviel von hunderten er jährlich verlohren hat?

Es sey x die gesuchte Zahl, das ist, das, was von jeden hundert Thalern nach dem ersten Jahre verlohren geht. Macht man nun diese Proportion

$100 : 100 - x = a : a \times \frac{100 - x}{100}$, so drückt das vierte Glied $a \times \frac{100 - x}{100}$ oder $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ diejenige Summe aus, welche aus der Summe a nach dem ersten Jahre geworden ist.

Wenn man hernach diese Proportion fortsetzet, und sagt:

100:

$100 : 100 - x = \frac{a \times \overline{100 - x}}{100} : \frac{a \times \overline{100 - x}^{2}}{10000}$, so drücket das vierte Glied $\frac{a \times \overline{100 - x}^{2}}{10000}$ oder $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{2}$ diejenige Summe aus, welche aus eben der Summe a nach dem zweyten Jahre wird.

Eben so muß man diejenige Summe, welche aus der Summe a nach dem dritten Jahre wird, durch $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{3}$ ausdrücken, und überhaupt wird das, was sie nach dem n^{ten} Jahre wird, seyn $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{n}$, das ist, a vermehret durch die zu der Potenz n erhöhete Größe $1 - \frac{x}{100}$.

II.

Wenn man nun wissen will, was für eine Gleichung man aufzulösen hat, wenn man setzet, daß der Kaufmann in dem zweyten Jahre aus der Handlung getreten sey, so muß man die Größe $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{2}$ der um die Größe b verminderten Größe $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ gleich setzen, welches giebt $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{2} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$, oder wenn man $1 - \frac{x}{100}$ durch sich selbst vermehret, wie solches der Exponent 2 andeutet,

Gleichung der vorhergehenden Aufgabe für den Fall des zweyten Grades.

$a\times\overline{1-\frac{2x}{100}+\frac{xx}{10000}}=a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b$, woraus durch die Entwickelung wird $x^2-100x=-10000\frac{b}{a}$, eine Gleichung vom zweyten Grade, zu deren Auflösung man durch die vorhergehenden Methoden nicht gelangen kann.

III.

Wenn man setzet, daß dieses erst im dritten Jahre geschehen sey, so wird die aufzulösende Gleichung seyn $a\times\overline{1-\frac{x}{100}}^{3}=a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b$, woraus, wenn man $1-\frac{x}{100}$ zweymal durch sich selbst vermehret, wie solches der Exponent 3 anzeiget, wird

Für den dritten Grad.

$a\times\overline{1-\frac{3x}{100}+\frac{3x^2}{10000}-\frac{x^3}{1000000}}=a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b$, oder endlich

$x^3-300x^2+20000x=+1000000\frac{b}{a}$, eine Gleichung, welche natürlicher Weise noch mehr Schwierigkeit zu vermuthen giebt, als die vorhergehende.

IV.

Was die übrigen Fälle anlangt, so sieht man leicht, wie man nach und nach die Gleichungen würde machen können, welche für sie gehöreten. Die Induction zeiget, daß die Gleichung allezeit von dem durch die Zahl n ausgedrückten Grade seyn wird. Will man diese Gleichung überhaupt haben, ohne die Zahl n in Ziffern auszudrücken, so darf man nur den allgemeinen

Aus-

Ausdruck $a\times\overline{1-\frac{x}{100}}^{\,n}$ derjenigen Größe brauchen, welche nach dem n^{ten} Jahre aus a geworden, so wird die Gleichung seyn

Für den Grad n.

$$a\times\overline{1-\frac{x}{100}}^{\,n}=a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b, \text{ oder} \ldots\ldots$$

$$\overline{1-\frac{x}{100}}^{\,n}=1-\frac{x}{100}-\frac{b}{a}.$$

V.

Wir wollen uns füritzo daran begnügen, daß wir die Aufgabe in dem Falle auflösen, wenn die Gleichung vom zweyten Grade ist, das ist, wenn sie $x^2-100x=-10000\frac{b}{a}$ ist; oder vielmehr, wir wollen eine Methode suchen, nach welcher man überhaupt alle Gleichungen vom zweyten Grade auflösen kann. Wer Fälle von höhern Graden eben dieser Aufgabe auflösen will, der wird es leicht thun können, sobald er aus den folgenden die allgemeinen Methoden, die den Graden, auf welche diese Gleichungen steigen, zukommen, wird ersehen haben.

Wie man zu der allgemeinen Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade gelanget.

Wenn man eine Methode, die Gleichungen vom zweyten Grade allgemein aufzulösen, suchet, so ist das natürlichste, darauf man fallen kann, daß man untersuche, was diese Gleichungen mit den Gleichungen vom ersten Grade für eine Verbindung haben. Nun ist aber klar, daß eine jede Gleichung vom ersten Grade zu einer Gleichung vom zweyten Grade wird, wenn man die beyden Glieder derselben quadriret. Z. E. aus $x+a=b$ wird, wenn man es quadriret,

$x^2 + 2ax + a^2 = b^2$. Man muß also sehen, ob man, durch eine entgegengesetzte Verrichtung, eine jede Gleichung vom zweyten Grade auf eine Gleichung vom ersten Grade bringen kann. Wir wollen z. E. die Gleichung $x^2 + px = q$ vornehmen, als welche eine jede Gleichung vom zweyten Grade, nach den Werthen des p und des q, ausdrücken kann, weil diese Buchstaben alle Arten von Größen, positive oder negative, andeuten können. Zufolge dem, was wir gesagt haben, darf man nur sehen, ob etwan $x^2 + px$ das Quadrat einer Größe ist, deren erster Theil x, und deren anderer Theil eine bekannte Größe ist, damit man dadurch die Gleichung vom ersten Grade finden könne, aus welcher, nachdem man sie quadriret, $x^2 + px = q$ geworden. Man sieht aber bald, daß $x^2 + px$ kein Quadrat ist; doch sieht man auch zugleich, daß es durch eine Hinzusetzung ein Quadrat werden kann: und man hat, wie bekannt ist, die Freyheit, etwas hinzuzusetzen, wenn man nur zu der andern Hälfte der Gleichung eben so viel hinzusetzet.

Damit man nun finde, was zu $x^2 + px$ noch fehlet, um ein Quadrat daraus zu machen, so darf man nur diese Größe mit dem Quadrate $xx + 2ax + aa$ vergleichen. Wenn nun px für $2ax$ steht, so muß $2a$ so viel als p, und folglich a so viel als $\frac{1}{2}p$ gelten. Da nun a^2 dasjenige ist, was zu $x^2 + 2ax$ fehlet, um daraus ein Quadrat zu machen, so muß das Quadrat von $\frac{1}{2}p$, das ist, $\frac{1}{4}p^2$ dasjenige seyn, was

zu

zu $xx+px$ fehlet, um daraus ein Quadrat zu machen. Das ist, $xx+px+\frac{1}{4}p^2$ muß ein Quadrat seyn; und es ist auch wirklich das Quadrat von $x+\frac{1}{2}p$. Da man nun $\frac{1}{4}pp$ zu der ersten Hälfte der Gleichung hinzugesetzet hat, so muß man zu der andern Hälfte eben so viel hinzusetzen, und so wird die Gleichung folgende $xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp$. Nun giebt aber die Größe $x+\frac{1}{2}p$, wenn sie durch sich selbst vermehret wird, $xx+px+\frac{1}{4}pp$. Diese Größe muß also auch derjenigen Zahl gleich seyn, welche, wenn sie durch sich selbst vermehret wird, $q+\frac{1}{4}pp$ giebt. Diese Zahl nun, oder diese Größe überhaupt, auszudrücken, schreibt man $\sqrt{q+\frac{1}{4}pp}$. Man bedienet sich dazu des Zeichens $\sqrt{}$, welches man das Wurzelzeichen nennet, und welches anzeigt, * daß man die Quadratwurzel der darauf folgenden Größe nehmen soll, über welcher Größe allemal, zu Vermeidung der Verwirrung, ein Strich gezogen werden muß, oder sie muß in Haken eingeschlossen werden.

Das Zeichen $\sqrt{}$ zeigt die Quadratwurzel an.

Man bekömmt also, wenn man sich dieser Bezeichnung bedienet, $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, woraus man herleitet $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$. Dieses ist der Werth von x in der vorgegebenen Glei-

* Die Zahl, aus welcher, wenn sie durch sich selbst vermehret worden, eine andere Zahl entstanden ist, wird dieser ihre Quadratwurzel, oder bloß ihre Wurzel, genennet. Diese in der Rechenkunst bekannte Erklärung wird auch in der Algebra, für alle Arten von Größen, angenommen.

Gleichung $xx+px=q$, und dieser Werth kann auch für eine jede gegebene Gleichung genommen werden, sobald man aus der Vergleichung dieser Gleichung mit $xx+px=q$ die besondern Werthe von p und von q bestimmet hat.

VI.

Die Quadratwurzel einer Größe ist so wohl negativ, als positiv.

Eine Gleichung vom zweyten Grade hat zwo Wurzeln, das ist, zween Werthe von x

Wenn man sich gegenwärtig erinnert, daß man (I. Theil LX §.) gefunden hat, daß, aus einer negativen Größe, durch eine negative Größe vermehret, eben so wohl eine positive Größe herauskömmt, als wenn man zwo positive Größen durch einander vermehret, so wird man sehen, daß man der Wurzel einer positiven Größe allezeit ein Zeichen geben kann, welches man will. Also kann man anstatt der Gleichung $x+\frac{1}{2}p=+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ schreiben $x+\frac{1}{2}p= -\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, welches hernach geben würde $x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$. Hieraus zieht man den allgemeinen Grundsatz, daß eine jede Gleichung vom zweytem Grade allezeit zwo Wurzeln hat. Man versteht alsdenn durch die **Wurzel einer Gleichung** den Werth der unbekannten Größe in dieser Gleichung. Man muß sich wohl in Acht nehmen, daß man diesen Namen nicht mit dem Namen der Quadratwurzel vermenget.

VII.

Formel, welche diese beyden Wurzeln in sich hält.

Beyde Wurzeln, oder beyde Werthe von x in der vorhergehenden Gleichung $xx+px=q$, in einen und denselben Ausdruck einzuschlies-

schließen, bedient man sich des Zeichens $\pm$, und man schreibt diese beyden Werthe also, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

VIII.

Anwendung der vorhergehenden Formel bey der Gleichung im II. §.

Nun wollen wir diese allgemeine Auflösung bey der Gleichung $xx - 100x = -10000\frac{b}{a}$, zu welcher wir in der vorhergehenden Aufgabe gelanget waren, anwenden. Wenn wir diese Gleichung mit $x^2 + px = q$ vergleichen, so bekommen wir $p = -100$; $q = -10000\frac{b}{a}$, und wenn wir diese Werthe gehöriger maaßen an die Stellen von p und q in der allgemeinen Formel $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ setzen, so wird daraus $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$.

IX.

Abkürzung des Werths von x durch Formirung der Wurzel des Products aus den Wurzeln derer Größen, welche durch einander vermehret werden.

Man kann den Theil $\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$ dieses Werthes von x, welcher das Wurzelzeichen vor sich hat, in eine etwas einfachere Forme bringen, vermöge des Grundsatzes, daß die Quadratwurzel des Productes zwoer oder mehrerer Größen das Product der Quadratwurzeln dieser Größen ist. Denn wenn man $2500 - 10000\frac{b}{a}$ in seine beyden Theiler, 2500 und $1 - \frac{4b}{a}$, zergliedert, und die Wurzeln dieser beyden Größen nimmt, so bekömmt man 50 und $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$. Dieser ihr Product $50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$ wird der Werth von . . . . .

$\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$ seyn. Das ist, der Werth von x wird seyn $50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

Was den Beweis dieses Grundsatzes anlangt, daß man die Wurzel eines jeden Productes findet, wenn man die Wurzeln der Größen, aus derer Vermehrung durch einander es entstehet, durch einander vermehret, so kann man denselben leicht begreifen, wenn man sich an das Umgekehrte dieses Grundsatzes erinnert, das ist, daß wenn man ein Product, z. E. ab, quadriren will, man die Quadrate aa und bb der Größen, aus welcher dieses Product erzeuget wird, durcheinander vermehret.

X.

Exempel von dieser Aufgabe.

Von diesem Werthe von x eine Anwendung zu machen, darf man nun nur noch wissen, wie sich b und a gegen einander verhalten sollen. Wir wollen z. E. setzen, b sey $\frac{6}{25}$ von a, das ist, der Kaufmann habe befunden, daß in dem zweyten Jahre die Summe um $\frac{6}{25}$ des Ganzen kleiner geworden, als sie nach dem ersten Jahre gewesen: so bekömmt man, wenn man dieses voraussetzet, $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$, und $1 - \frac{4b}{25} = \frac{1}{25}$. Also wird die Wurzel $\sqrt{1 - \frac{4b}{25}}$ seyn $\frac{1}{5}$, und folglich geben $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$, wodurch zugleich 60 und 40 ausgedrückt wird.

Nun wird aber durch diese beyden Werthe von x die Gleichung $xx - 100x = -2400$, in welche die allgemeine Gleichung $xx - 100x$

$= -$

$= -10000\frac{b}{a}$, indem man $\frac{6}{25}$ für $\frac{b}{a}$ setzet, verwandelt wird, wirklich auf einerley Art aufgelöset. Denn aus $xx - 100x$ wird -2400, man mag setzen $x = 60$, oder $x = 40$.

Man kann auf eine noch überzeugendere Art die Nothwendigkeit der beyden Auflösungen 60 und 40 einsehen. Denn wenn man erstlich setzet $x = 60$, das ist, von 100000 Thalern z. E. wären in einem Jahre 60 von hunderten verlohren gegangen, so ist klar, daß diese Summe nach dem ersten Jahre bis auf 40000 Thaler muß seyn vermindert worden.

In dem zweyten Jahre, da wieder 60 von hunderten verlohren gegangen, wird sie bis auf 16000 Thaler heruntergebracht seyn. Nun sind aber 16000 Thaler um 24000 Thaler, welche die $\frac{6}{25}$ von 100000 sind, weniger, als 40000 Thaler.

Setzet man, von eben diesen 100000 Thalern wären in einem Jahre 40 von hunderten verlohren gegangen, so müssen nach dem ersten Jahre noch 60000 Thaler, und nach dem zweyten noch 36000 Thaler davon übrig seyn. Nun sind aber 36000 Thaler ebenfalls um 24000 Thaler, oder um die $\frac{6}{25}$ von 100000 Thalern, weniger, als die Summe von 60000 Thalern.

XI.

Will man setzen, b wären $\frac{4}{25}$ von a, so bekömmt man $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50\sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30$, das ist entweder 80 oder Ein ander Exempel.

20, und

20, und man wird finden, daß beyde Zahlen die Aufgabe gleich richtig auflösen.

XII.

Drittes Exempel, welches, weil es die Wurzel einer negativen Größe erfordert, unmöglich ist.

Setzet man aber $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, so wird man finden $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4}{3}}$, oder $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$. Da aber keine Größe zu finden ist, welche, wenn sie durch sich selbst vermehret wird, — giebt, so folgt daraus, daß die Größe $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ nicht wirklich seyn kann, oder, welches einerley ist, daß die Aufgabe in diesem Falle unmöglich ist.

Man kann also versichert seyn, daß es keinen möglichen Werth giebt, welchen man in der Gleichung $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$ an die Stelle des x setzen kann, und welcher machen könnte, daß die beyden Hälften der Gleichung einander gleich würden, oder, welches einerley ist, daß die Summe a nicht jährlich nach einer gegebenen Proportion verändert werden kann, welche so beschaffen wäre, daß die Verminderung vom zweyten zum dritten Jahre einem Drittel der ganzen Summe gleich wäre. Inzwischen betrachten die Mathematiker den Werth von $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$, welchen sie alsdenn finden, als eine Art von Auflösung oder von Wurzeln der Gleichung $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$: Aber sie nennen es eine **unmögliche Wurzel**, und diese unmögliche Wurzel wird wegen des Zeichens $\pm$ allezeit als eine doppelte Auflösung betrachtet.

Diese Wurzeln werden unmögliche Wurzeln (radices imaginariae) genennet.

XIII.

Welches die Gleichungen vom zweyten Grade sind, derer Wurzeln unmöglich sind.

Man sieht aus dem allgemeinen Werthe $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ von x, daß allemal, wenn die durch q bezeichnete Größe negativ und größer ist, als $\frac{1}{4}pp$, die Wurzeln der Gleichung $xx + px = q$ beyde unmögliche seyn müssen.

XIV.

Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade, ohne sie mit der allgemeinen Formel zu vergleichen.

Wenn man eine Gleichung vom zweyten Grade hat, sie mag seyn, wie sie will; so kann man sie auflösen, ohne sie Glied vor Glied mit der allgemeinen Gleichung, $xx + px = q$, zu vergleichen. Denn man kann, ohne mehr Rechnens zu machen, eben so verfahren, wie bey Auflösung dieser allgemeinen Gleichung. Man darf nur zu den beyden Hälften das Quadrat der Hälfte derjenigen Größe, durch welche x, in dem zweyten Gliede der ersten Hälfte vermehret ist, hinzusetzen, und hernach die Quadratwurzeln der beyden Hälften nehmen. Man soll z. E. die Gleichung $xx + 8x = 9$ auflösen. Wenn man auf beyden Seiten 16, als das Quadrat der Hälfte von 8, hinzusetzet, so bekömmt man $xx + 8x + 16 = 9 + 16 = 25$. Nimmt man hernach die Wurzeln von beyden Seiten, so bekömmt man $x + 4 = \pm 5$, das ist, $x = -4 \pm 5$, oder, $x = -9$, und $x = 1$, und diese Werthe lösen die Gleichung alle beyde gleich richtig auf.

XV.

Die Anfänger zu den Schwierigkeiten anzugewöhnen, welche man in den Aufgaben vom

zweyten Grade antrifft, wollen wir ihnen noch folgende Aufgabe vorlegen.

Eine andere Aufgabe vom zweyten Grade.

In der geraden Linie zwischen zweyen Lichtern denjenigen Punct zu finden, wo diese beyden Lichter gleich stark leuchten; wobey man diesen physikalischen Grundsatz voraussetzet, daß die Wirkung eines Lichtes viermal größer ist, wenn es zweymal näher ist, daß die Wirkung neunmal größer ist, wenn das Licht dreymal näher ist; oder, mathematisch zu reden, daß die Wirkung des Lichtes sich umgekehrt verhält, wie das Quadrat der Entfernung.

Es sey a die Entfernung der beyden gegebenen Lichter von einander, und die Wirkung des kleinsten Lichtes in einer gewissen Entfernung verhalte sich zu der Wirkung des größten Lichtes in eben dieser Entfernung, wie m zu n.

Ferner sey x die Entfernung des kleinern Lichtes von einem auf der geraden Linie zwischen den beyden Lichtern willkührlich angenommenen Puncte. Es ist klar, daß $a - x$ die Entfernung eben dieses Punctes von dem andern Lichte seyn muß, daß die Quadrate dieser beyden Entfernungen seyn müssen x^2, und $x^2 - 2ax + a^2$, und daß folglich die Größen, welche sich umgekehrt verhalten, wie diese Quadrate, sich verhalten müssen, wie $\frac{1}{xx}$ * und $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$

Hier-

* Dieses werden diejenigen leicht verstehen, welche aus der Rechenkunst wissen, was umgekehrte Verhältnisse sind. Es ist eben so leicht zu begreifen daß $\frac{1}{xx}$ und $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$ sich umgekehrt verhalten, wie xx und $xx - 2ax + aa$, als dieses, daß sich $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ umgekehrt verhalten, wie 3 und 4.

$$\begin{array}{l|l} & 10a+3b \\ 25a^2+30ba+9b^2 & 5a+3b \\ -25a^2 & \\ \hline \quad 30ba+9b^2 & \\ \quad -30ba-9b^2 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

1. Feld.

$$\begin{array}{l|l} & 4a-2b+c \\ & 4a-b \\ 4a^2-4ba+4ca+b^2-2cb+cc & 2a-b+c \\ -4a^2 & \\ \hline -4ba+4ca+b^2-2cb+cc & \\ +4ba \qquad -b^2 & \\ \hline 4ca \qquad -2cb+cc & \\ -4ca \qquad +2cb-cc & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2. Feld.

$$\begin{array}{l|l} & 4x^2+4ax+4b^2 \\ & 4x^2+2ax \\ 4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16b^2ax+16b^4 & 2x^2+2ax+4b^2 \\ -4x^4 & \\ \hline 8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16b^2ax+16b^4 & \\ -8ax^3-4a^2x^2 & \\ \hline 16b^2x^2+16b^2ax+16b^4 & \\ -16b^2x^2-16b^2ax-16b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3. Feld.

einerley Nenner giebt, und die Abkürzung verrichtet.

Wenn dieses geschehen ist, so nimmt man die Wurzel der beyden Hälften der Gleichung, wodurch man bekömmt $x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}}$ oder $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, indem man die Wurzel des Theiles $\frac{aa}{\overline{n-m}^2}$, welcher ein vollkommenes Quadrat ist, nimmt, und dessen Vermehrer mn, welcher kein Quadrat ist (wenigstens nicht bey allen Werthen von m und von n), unter dem Wurzelzeichen stehen läßt. Es werden also die beyden Werthe von x, welche die vorhergehende Gleichung, und folglich auch die Aufgabe, welche uns auf diese Gleichung gebracht hat, auflösen, durch folgende Formul ausgedrückt:

$$x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn} \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}.$$

XVI.

Von den beyden vorhergehenden Werthen ist nothwendig der eine positiv, der andere negativ.

Aus diesem Ausdrucke erhellet, daß einer von den beyden Werthen nothwendig negativ, und der andere positiv seyn muß. Denn 1) wenn man das Zeichen — vor die Wurzelgröße $\sqrt{mn}$ setzet, so ist kein Zweifel daran, daß die ganze Größe negativ seyn muß. 2) Wenn man $\sqrt{mn}$ positiv setzet, so muß $-m + \sqrt{mn}$, welches man alsdenn bekömmt, positiv seyn, weil, da man gesetzet

setzet hat, daß n größer als m sey, $\sqrt{mn}$ größer seyn muß, als m.

XVII.

Wenn man nun wissen will, was man mit diesem negativen Werthe machen soll; so wird man, wenn man sich erinnert, was (I. Theil LXIII. §.) von diesen Werthen in den Gleichungen vom ersten Grade gesagt worden, finden, daß er in dem der ersten Bedeutung entgegengesetzten Verstande genommen werden muß; das ist, der Punct, welchen dieser Werth zu Auflösung dieser Aufgabe giebt, muß, anstatt zwischen den beyden Lichtern zu liegen, in der Verlängerung der Linie seyn, welche durch dieselben geht, und zwar auf der Seite, wo das schwächste Licht ist. Gebrauch des negativen Werthes.

Man wird keine Schwierigkeit finden, diese Lage des negativen Werthes von x zuzugeben, wenn man bedenket, daß eben dieser Werth nur darum negativ befunden worden, weil man die Aufgabe in der Voraussetzung aufgelöset hat, als wenn der gesuchte Punct zwischen beyden Lichtern läge. Denn wenn man es als möglich angesehen hätte, diesen Punct in der über die Lichter hinaus verlängerten Linie anzunehmen, so würde man in Ansehung dieser Lage eine ganz andere Rechnung bekommen haben, und das x, welches alsdenn natürlicher Weise in der Verlängerung der durch beyde Lichter gezogenen Linie wäre genommen worden, würde positiv gewesen seyn.

XVIII.

Damit man uns desto besser verstehe, so wollen wir die ganze Aufgabe wieder vornehmen, und voraussetzen, der gesuchte Punct sey in der Verlängerung der zwischen beyden Lichtern gezogenen geraden Linie. Da die Entfernung dieses Punctes von dem kleinern Lichte allezeit x heißt, so wird nunmehr seine Entfernung von dem größten Lichte seyn $a + x$, und die Quadrate dieser Entfernungen werden seyn xx und $aa + 2ax + xx$. Folglich werden die beyden Größen der Erleuchtung seyn $\frac{m}{xx}$ und $\frac{n}{aa + 2ax + xx}$. Da diese, kraft der Bedingungen der Aufgabe, einander gleich sind; so geben sie $\frac{m}{xx} = \frac{n}{aa + 2ax + xx}$, oder $maa + 2amx + mxx = nxx$, oder $\overline{n - m} \times xx - 2amx = maa$, oder $xx - \frac{2amx}{n - m} = \frac{m}{n - m} aa$; welche letzte Gleichung durch ihre Auflösung giebt $x = \frac{a \times \overline{m \pm \sqrt{mn}}}{n - m}$, wovon der erstere Werth $\frac{a \times \overline{m + \sqrt{mn}}}{n - m}$ positiv, und der einzige seyn wird, der die Aufgabe in dem Verstande, in welchem sie itzo genommen worden, auflöset.

Was den andern Werth $\frac{a \times \overline{m - \sqrt{mn}}}{n - m}$, welcher negativ ist, anlanget, so muß er alsdenn in einem dem erstern entgegengesetzten Verstande genommen werden; das ist, der Punct, welchen er angiebt, muß nicht, wie in dieser Rechnung vorausgesetzet wor-

worden, in der Verlängerung der zwischen den beyden Lichtern gezogenen Linie, sondern in dieser Linie selbst, genommen werden.

Also bekömmt man in dieser neuen Auflösung, in Ansehung der Zeichen, gänzlich das Gegentheil von dem, was man in der ersten bekommen, und diese beyden Auflösungen bekräftigen das, was wir schon in dem ersten Theile im LXIII. §. gesehen haben, daß nämlich die unbekannten Größen, welche negativ werden, allezeit in einer Bedeutung genommen werden müssen, welche derjenigen Bedeutung entgegengesetzet ist, die man ihnen bey Ausdrückung der Aufgabe beygelegt hatte.

XIX.

Wir werden hoffentlich den Lesern aus allem Zweifel, bey dieser Aufgabe, helfen, wenn wir die Sache mit einem Exempel erläutern. Wir wollen setzen $n = 4m$, das ist, daß das größere Licht viermahl so stark sey, als das andere. Wenn man diesen Werth von n in der allgemeinen Formel im XV. §. . . . . $x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$ an die Stelle des n setzet, so wird daraus $x = \frac{a}{3} \times \overline{\pm 2 - 1}$, das ist, $+\frac{1}{3}a$ oder $-a$, welche beyde Werthe zween Puncte geben, durch welche alle beyde die Aufgabe aufgelöset wird, indem der eine Punct zwischen den beyden Lichtern, und zweymal näher bey dem schwächern, als bey dem stärkern ist, der andere aber in der Verlängerung der durch diese beyden Lichter gezogenen Linie liegt, und zwar eben so

weit von dem schwächern Lichte entfernet ist, als die beyden Lichter von einander entfernet sind. Nun kann man aber, auch ohne Algebra, sehr leicht einsehen, daß durch diese beyden Puncte die Aufgabe gleich richtig aufgelöset wird, weil ein jeder dem schwächern Lichte zweymal näher ist, als dem stärkern, und weil das stärkere Licht viermal so stark ist, als das schwache.

XX.

Die itzt gegebenen Grundregeln sind hinlänglich für alle Gleichungen vom zweyten Grade. Da sich aber die Anfänger solche nicht anders geläufig machen können, als indem sie dieselben ausüben, so wollen wir sie in der Auflösung verschiedener Aufgaben anwenden. Sie werden dabey den Vortheil finden, daß sie, ausser dem, daß sie die Methode desto besser werden verstehen lernen, neue algebraische Operationen lernen können, die man ohne Zweifel denen Untersuchungen zu danken hat, welche die ersten Analysten bey Gelegenheit der Gleichungen vom zweyten Grade angestellet haben.

Neue Exempel, von Auflösungen der Gleichungen vom zweyten Grade.

Es sey $bxx = 2c^2x + 2cca$. Wenn man diese Gleichung ordnet, das ist, wenn man die Glieder, bey welchen ein x ist, auf eine Seite bringt, und alle Glieder durch den Coefficienten von xx theilet, so bekömmt man $x^2 - \frac{2ccx}{b} = \frac{2cca}{b}$. Ferner, wenn man zu beyden Hälften dieser Gleichung $\frac{c^4}{bb}$ hinzusetzet, und hernach die Quadratwurzel nimmt, so bekömmt man

$x -$

$x - \frac{cc}{b} = \pm \sqrt{\frac{2ccab + c^4}{bb}} = \pm \frac{c}{b}\sqrt{2ab + cc}$,

das ist $x = c\frac{c \pm \sqrt{2ab + cc}}{b}$.

Es sey $ff + gg - 2gx + xx = \frac{mmxx}{nn}$. Hieraus wird anfänglich $\frac{mm - nn}{nn} \times xx + 2gx = ff + gg$, oder $xx + \frac{2gnn}{mm - nn} x = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn}$, und hernach $xx + \frac{2gnnx}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2} = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2}$ $= \frac{ffnnmm + ggnnmm - ffn^4}{\overline{mm - nn}^2}$, woraus man bekömmt

$x + \frac{gnn}{mm - nn} = \pm \frac{n\sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}}{mm - nn}$,

oder $x = \frac{n}{mm - nn} \times \overline{-gn \pm \sqrt{(ffmm + ggmm - ffnn)}}$

Es sey $abc - aff + 2afz = azz - bzz$. Nachdem man diese Gleichung geordnet hat, so wird daraus $zz - \frac{2af}{a - b} z = \frac{abc - aff}{a - b}$, und hernach $zz - \frac{2af}{a - b} z + \frac{aaff}{\overline{a - b}^2} = \frac{abc - aff}{a - b}$ $+ \frac{aaff}{\overline{a - b}^2} = \frac{aabc - abbc + abff}{\overline{a - b}^2}$, welches giebt

$z = \frac{af \pm \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a - b}$.

Es sey $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$. Nachdem man die Glieder dieser Gleichung geordnet hat, so bekömmt man $xx - ax =$

$2aa - 9ab + 9bb$, oder $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa - 9ab + 9bb$, welches giebt ......

$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$.

Man wird diese Größe leicht entwickeln können, wenn man bemerket hat, und man hat es ohne Zweifel bey allem, was wir bisher gesagt haben, bemerken müssen, daß das Quadrat einer aus zween Gliedern zusammengesetzten Größe der Summe der Quadrate eines jeden Gliedes, nebst dem doppelten Producte dieser beyden Glieder, gleich seyn muß.

Denn da man in der Größe $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ die Glieder $\frac{9}{4}aa$ und $9bb$, welche die Quadrate von $\frac{3}{2}a$ und von $3b$ sind, ingleichen das Glied $9ab$, welches das doppelte Product von $\frac{3}{2}a$ und $3b$ ist, findet, so sieht man leicht, daß diese Größe $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ das Quadrat von $\frac{3}{2}a - 3b$ ist. Man kann also anstatt des Ausdruckes $\sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$ nur schlechthin schreiben $\frac{3}{2}a - 3b$. Der Werth von x ist also nunmehr $\frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}a \mp 3b$, das ist, entweder $2a - 3b$, oder $-a + 3b$; und man sieht auch wirklich, daß diese Werthe die gegebene Gleichung alle beyde auflösen.

XXI.

Da bey den unterschiedenen Gleichungen vom zweyten Grade, welche man etwan aufzulösen hat, oft eben solche Fälle, wie der itzige war, vorkommen können; so muß man eine sichere und allgemeine Methode haben, nach welcher man wissen kann, welche Größen Quadrate sind,

sind, und nach welcher man die Wurzeln derselben finden kann. Diese Methode ist leicht aus den in dem vorhergehenden Exempel beobachteten Gründen herzuleiten. Itzo will ich an einem andern Exempel zeigen, wie man dabey verfährt.

Man soll die Quadratwurzel von der Größe $30ab + 9bb + 25a^2$ finden.

Die Art, wie man die Quadratwurzel ausziehet, wird mit einem Exempel erläutert.

Erstlich ordne ich diese Größe nach einem in derselben enthaltenen Buchstaben, z. E. nach a, und schreibe folglich diese Größe so, wie man auf der beygefügten Tafel, im 1. Felde, sieht.

Hernach nehme ich die Wurzel des ersten Glieds $25a^2$, welche $5a$ ist, mache sie zum ersten Gliede der gesuchten Wurzel, und schreibe sie neben der vorgegebenen Größe $25a^2 + 30ba + 9bb$, nachdem ich vorher, die Verwirrung zu vermeiden, einen Strich daneben gemacht habe. Alsdenn setze ich unter die vorgegebene Größe das Quadrat $25a^2$ von $5a$, und gebe ihm das Zeichen —, worauf ich einen Querstrich ziehe, und die Abkürzung verrichte. Hierdurch bekomme ich die Größe $30ba + 9bb$, welche ich unter den Querstrich schreibe. Wenn dieses geschehen ist, so verdoppele ich $5a$. Dieses giebt mir $10a$, welches ich über $5a$ schreibe. Hernach theile ich das erste Glied $30ba$ der Größe $30ba + 9bb$ durch $10a$, und schreibe den Quotienten $3b$, welcher das zweyte Glied der gesuchten Wurzel ist, neben $5a$, und zugleich auch neben $10a$. Dieses neue Glied $3b$ der

Wur-

Wurzel vermehre ich durch die obere Größe $10a+3b$, wobey ich, wie bey der Theilung, dieses beobachte, daß ich die Zeichen verändere, indem ich das Product unter die Größe $30ab+9bb$ schreibe. Endlich verrichte ich die Abkürzung, und weil ich sehe, daß alles einander aufhebt, so schließe ich, daß $5a+3b$ die gesuchte Wurzel sey.

XXII.

Daß sich die Anfänger in der Methode, die Quadratwurzeln auszuziehen, fester setzen, wird es nicht undienlich seyn, ihnen folgende beyde Exempel aufzugeben.

Andere Exempel, von Ausziehung der Quadratwurzel.

Man soll erstlich die Quadratwurzel aus der Größe $4a^2-4ba+4ca+bb-2cb+cc$, welche nach dem Buchstaben *a* geordnet ist, ausziehen.

Erstlich nehme ich die Wurzel von $4a^2$, welche $2a$ ist, und schreibe sie der vorgegebenen Größe zur Seite. (Siehe das 2. Feld der beygefügten Tafel). Hernach ziehe ich das Quadrat $4aa$ ab, und schreibe den Rest $-4ba+4ca+b^2-2cb+cc$ unter den Strich. Ferner verdoppele ich $2a$, und schreibe das Doppelte $4a$ darüber, theile das Glied $-4ba$ durch $4a$ und schreibe den Quotienten $-b$ sowohl neben der Wurzel, als auch neben dem Theiler $4a$. Hernach vermehre ich $-b$ durch $4a-b$, und bekomme, indem ich die Zeichen verändere, $+4ba-bb$. Nachdem ich dieses unter die zu theilende Größe gesetzet, und die Abkürzung verrichtet habe; so bekomme ich $4ca-2cb+cc$, welches

ches noch ferner getheilet werden muß. Ich verdoppele alsdenn die Wurzel $2a - b$, und schreibe das Doppelte $4a - 2b$ darüber, theile $+ 4ca$ durch $4a$, und schreibe den Quotienten $+ c$ neben der Wurzel $2a - b$ und neben dem Theiler. Hierauf vermehre ich $+ c$ durch $4a - 2b + c$, und schreibe das Product mit entgegengesetzten Zeichen unter die zu theilende Größe, da ich denn sehe, daß alles einander aufhebt. Daraus schließe ich, daß die Wurzel möglich, und daß sie $2a - b + c$ ist.

Man soll ferner die Quadratwurzel aus der Größe $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$, welche nach dem x geordnet ist, ausziehen. Wenn man die Rechnungen so machet, wie sie auf der beygefügten Tafel, im dritten Felde, zu sehen ist, so wird man bald finden, daß die Wurzel dieser Größe ist $2xx + 2ax + 4bb$.

XXIII.

In den unterschiedenen Exempeln, welche wir zu Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade gegeben haben, werden die Anfänger eben nicht viel Schwierigkeiten gefunden haben, ausser, wenn sie die Quadratgrößen, aus deren Vermehrung durch einander die Wurzelgröße mit entstanden, unter dem Wurzelzeichen haben wegnehmen, und dadurch die Wurzelgrößen abkürzen sollen. Dieses ist auch wirklich die schwerste unter denjenigen Verrichtungen, welche man bey Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade vornehmen muß. Es ist also sehr nöthig, daß sich die Anfänger dieselbe geläufig

läufig machen. Um ihnen hierinnen zu Hülfe zu kommen, wollen wir hier folgende Exempel beyfügen.

Exempel von Abkürzung der Wurzelgrößen.

$$\sqrt{48aabc} = 4a\sqrt{3bc}$$

$$\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}} = \frac{a - 2b}{c}\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{\frac{aahhmm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} = \frac{am}{pz}\sqrt{hh + 4mp}$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}abb} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}.$$

XXIV.

Die Größen, welche keine vollkommene Wurzeln haben, werden incommensurable Größen, oder Irrationalgrößen genennet.

Sobald man fast nur aus den Gleichungen vom zweyten Grade die **irrationalen**, oder **incommensurablen** Größen (so nennet man diejenigen Größen, welche keine vollkommene Wurzeln haben) hat kennen lernen, so hat man mit diesen Größen eben diejenigen Operationen vornehmen müssen, welche man mit den rationalen und commensurablen Größen vornehmen muß; das ist, man hat entweder ganz incommensurable, oder zum Theil incommensurable zum Theil commensurable Größen, zu einander setzen, von einander abziehen, durch einander vermehren und theilen müssen.

Die Zusetzung und Abziehung dieser Größen setzt nichts, als ihre Abkürzung voraus.

Was die Zusetzung und Abziehung der Wurzelgrößen anlangt, so ist weiter keine Schwierigkeit dabey, als daß man sie durch die Abkürzung auf ihre einfachsten Ausdrückungen bringt.

Z. E. wenn ich $\sqrt{48abb}$ und $b\sqrt{75a}$ zusammensetzen soll, so verwandele ich die erste von diesen beyden Größen in $4b\sqrt{3a}$, und die andere in $5b\sqrt{3a}$, wovon die Summe ist $9b\sqrt{3a}$.

Eben

ermeh-
z der
tional-
n.

Exem
von A
zung
Wurzel
sen.

Die
sen, w
keine
komm
Wurzel
ben, n
den in
mensur
Größen
Irratio
größen
nennet.

Die
zung
Abziehu
dieser G
sen sei
nichts,
ihre Ab
zung v
aus.

Eben

Eben so ist $\sqrt{48c^3} - \sqrt{\frac{16}{27}c^3} = \frac{32}{9}c\sqrt{3c}$.

$\sqrt{\frac{ab^3}{cc}} + \frac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4aabb + 4ab^3}$
$= \frac{a}{2c}\sqrt{ab}$.

$a\sqrt{\frac{a^3b}{3aa + 6ac + 3cc}} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a+c}$ . . . . .
$= (\frac{aa}{\sqrt{3}} - bc\times)\frac{\sqrt{ab}}{a+c}$

XXV.

Vermehrung der Irrationalgrößen.

Was die Vermehrung betrifft, so ist klar, daß, wenn die zu vermehrenden Größen alle beyde incommensurabel sind, man nur die Größen, welche unter dem Wurzelzeichen stehen, durch einander, vermehren, und das Wurzelzeichen vor das Product setzen darf. Wenn hernach Abkürzungen zu machen nöthig sind, so macht man sie so, wie oben.

Wenn man z. E. $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$ vermehren soll, so schreibt man $\sqrt{aabc}$ oder $a\sqrt{bc}$.

Eben so ist $\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgccd}$ $= 2c\sqrt{3fgd}$.

Wenn die zu vermehrenden Wurzelgrößen einander gleich sind, so darf man nur das Wurzelzeichen wegnehmen. Z. E. wenn man $\sqrt{a^3cd}$ durch $\sqrt{a^3cd}$ vermehren soll, so schreibt man nur die Größe a^3cd ohne Wurzelzeichen hin.

Wenn die Größe, durch welche eine Wurzelgröße vermehret wird, rational ist, so darf man dieselbe nur vor das Zeichen, mit einem Striche darüber, wenn sie mehr als ein Glied hat, schreiben. Wollte man sie mit unter das Wurzelzeichen setzen, so müßte man sie vorher quadriren

Z. E.

Z. E. Das Product von $\overline{a+b}$ durch $\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$ ist $\overline{a+b}\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$ oder . . . $\sqrt{\frac{ffg\times\overline{aa+2ab+bb}}{aa-bb}}$ oder $\sqrt{\frac{ffg\times\overline{a+b}}{a-b}}$ oder $\frac{f\sqrt{ag+bg}}{\sqrt{a-b}}$;

$$2a\sqrt{\frac{aa+bb}{c}}\times-3a\sqrt{\frac{aa+bb}{d}}$$

$$=-\frac{6aa\times\overline{aa+bb}}{\sqrt{cd}}=-\frac{6a^4+6aabb}{\sqrt{cd}};$$

$$\sqrt{a+b}\times\sqrt{a-b}=\sqrt{aa-bb}.$$

Wenn man aus verschiedenen Größen zusammengesetzte Größen vermehren soll, welche entweder alle Wurzelgrößen, oder zum Theile Wurzelgrößen, zum Theile Rationalgrößen sind, so ist dieses eben so leicht zu verrichten, als das vorhergehende, wenn man sich nur an die gewöhnlichen Regeln der Vermehrungen der verwickelten Größen erinnert.

Z. E. $\overline{3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac}}\times 2c\sqrt{ab}$ $=6abc\sqrt{ac}-4abc\sqrt{bc}$;

$$\overline{a+\sqrt{aa-bb}}\times\overline{a+\sqrt{aa-bb}}=2aa-bb+2a\sqrt{aa-bb};$$

$$\overline{a+\sqrt{aa-xx}}\times\overline{a-\sqrt{aa-xx}}=xx.$$

XXVI.

Theilung der Irrationalgrößen.

Wenn man zwo Irrationalgrößen durch einander theilen soll, so muß man die Größen, welche unter dem Wurzelzeichen sind, theilen, und das Zeichen vor den Quotienten setzen.

Wenn man eine Irrationalgröße durch eine Rationalgröße theilen soll, so darf man nur die

Ratio-

Rationalgröße unter die andere setzen, und einen etwas langen Strich darüber machen, damit man sehe, daß das Zeichen nicht mit auf sie geht. Will man aber, daß das Wurzelzeichen mit darauf gehen soll, so muß man den Theiler quadriren.

Wenn commensurabele Größen vor den Wurzelgrößen sind, so muß man sie, wie gewöhnlich, theilen und den Quotienten derselben neben dem Wurzelquotienten schreiben. Alles dieses wird sehr leicht durch folgende Exempel zu begreifen seyn.

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b};\quad \frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c};\quad \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c};$$

$$\frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x};\quad \frac{\sqrt{aabb-bbxx}}{a-x} = b\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

XXVII.

Was itzo von den Gleichungen vom zweyten Grade gesagt worden, ist hinlänglich, wenn diese Gleichungen nur eine unbekannte Größe in sich enthalten. Da man aber oft Aufgaben antrifft, in welchen man mehrere unbekannte Größen braucht; so müssen wir sehen, wie man mit diesen Aufgaben verfährt. In dieser Absicht wollen wir folgendes Exempel vornehmen.

Eine Aufgabe vom zweyten Grade mit mehr als einer unbekannten Größe.

Drey Größen zu finden, welche in geometrischer Progression * sind, und derer Summe nebst der Summe ihrer Quadrate gegeben ist.

K Es

* Wenn von drey Größen die erste sich zu der zweyten verhält, wie die zweyte zu der dritten, wie z. E. 8, 12, 18, so sagt man daß diese Größen in einer geometrischen Progreßion, oder steten Proportion sind. Wenn man die Lehre von den Propor-

Es seyn die drey gesuchten Größen x, y, z; so bekömmt man, vermöge der Natur der Progressionen, $x : y = y : z$, das ist, $yy = xz$. Ferner, weil ihre Summe gegeben ist, so bekömmt man, wenn man diese Summe a nennet, $x + y + z = a$. Endlich, wenn man die Summe ihrer Quadrate bb nennet, so bekömmt man, vermöge der letzten Bedingung der Aufgabe, $xx + yy + zz = bb$.

Um nun sich dieser drey Gleichungen zu bedienen, so bringt man erstlich das z alleine, vermittelst seines Werths $a - x - y$, welchen man aus der Gleichung $x + y + z = a$ bekömmt. Wenn man nun diesen Werth von z in den beyden andern Gleichungen an die Stellen des z setzet, so wird daraus $2yy + 2xx + 2xy + aa - 2ax - 2ay = bb$, und $yy = ax - xx - xy$. Damit man nun eine von den beyden unbekannten Größen, die in diesen beyden Gleichungen sind, welche man will, wegbringe; so muß man den Werth suchen, welchen diese unbekannte Größe in jeder von diesen beyden Gleichungen hat, und die beyden Werthe, welche man hierdurch bekömmt, einander gleich setzen. Diese beyden Verrichtungen sind aber leicht nach den vorhergehenden Grundregeln. Für die erste Gleichung bekömmt man $x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$, und für die andere $x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$.

Man

tionen versteht, so versteht man auch die Lehre von den Progreßionen.

Man muß also die beyden Werthe einander gleich setzen, welches die Gleichung giebt $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay} = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$, welche Gleichung man also nur noch auflösen muß.

Erstlich sieht man, daß die Glieder $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$ auf beyden Seiten sind, und daß folglich die Gleichung also abgekürzet wird $\pm\sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Quadriret man nun die beyden Hälften dieser Gleichung, so fallen die Wurzelzeichen sogleich weg, und die Gleichung wird durch die Abkürzung also verändert: $ay = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$, welches giebt $y = \frac{aa - bb}{2a}$. Wenn man hernach diesen Werth von y in einem von den vorhergehenden Werthen von x an die gehörigen Stellen setzet, so bekömmt man $x = \frac{1}{4}a + \frac{bb}{4a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{3}{16}aa + \frac{3}{8}bb - \frac{3b^4}{16aa}}$ oder $x = \frac{bb + aa \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$; und wenn man den Werth von x, und den Werth von y, in $z = a - x - y$ an die gehörigen Stellen setzt; so bekömmt man endlich $z = \frac{aa + bb \mp \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$.

XXVIII.

Weil man in dieser Auflösung auf einen sehr einfachen Werth von y gekommen ist, da man

doch vorher ziemlich zusammengesetzte Wurzelgrößen gehabt; so läßt sich vermuthen, daß man durch einen kürzern Weg dazu gelangen könnte. Und in der That findet man, wenn man es nur ein wenig überlegt, leicht folgende Methode.

Eine andere Art, die vorhergehenden Gleichungen aufzulösen.

Wir wollen folgende beyde Gleichungen wieder vornehmen,

$x^2 - ax + yx = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} - y^2 + ay$, und $x^2 + xy - ax = -yy$. Wenn man diese beyden Gleichungen von einander abzieht, so bekömmt man $0 = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} + ay$, woraus man bekömmt $y = \frac{aa - bb}{2a}$. Dieser Werth giebt, wenn er in einer von diesen beyden Gleichungen an die gehörigen Stellen gesetzt worden, folgendes . . . . . $x^2 + \frac{aax - bbx}{2a} - ax = \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$ oder $x^2 - \frac{\overline{bb + aa} \times x}{2a} = \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$, woraus man eben den Werth von x herleitet, wie oben.

XXIX.

In dieser Aufgabe sind Größen vorgekommen, welche einander, wie von ohngefähr, aufgehoben, wodurch denn die Rechnungen sehr einfach geworden sind. Aber da in den Gleichungen vom zweyten Grade mit mehr als einer unbekannten Größe nicht allezeit solche leichte Fälle vorkommen; so muß man sehen, was man in nicht so einfachen Fällen zu thun hat. Wir wollen z. E. folgende beyde Gleichungen vorneh-

nehmen, $x^2 + ax - 2xy = aa + 2yy$; $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$.

Die erste von diesen Gleichungen giebt $x = -\frac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, und die andere giebt . . . . $x = a - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$. Wenn man diese beyden Werthe einander gleich setzet, und die Abkürzung verrichtet; so bekömmt man $-\frac{3a}{2} + \frac{3}{2}y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$ $= \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$.

Ein Exempel einer Gleichung vom zweyten Grade mit zwey unbekannten Größen, welches noch verwickelter ist, als das vorhergehende.

Die Wurzelzeichen aus dieser Gleichung wegzubringen, quadrire ich erstlich die beyden Hälften derselben. Dieses giebt mir $\frac{9}{4}yy - \frac{9}{2}ay + \frac{9}{4}aa \pm \overline{3y - 3a} \times \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy} + \frac{5}{4}aa - ay + 3yy = 3aa - ay - \frac{3}{4}yy$, worinnen noch ein Wurzelzeichen ist. Damit ich nun dasselbe wegbringe, so schreibe ich die Gleichung also, $-\frac{1}{2}aa + \frac{9}{2}ay - 6yy = \pm \overline{3y - 3a} \times \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, indem ich sie abkürze, und die Wurzelgröße . . . . $\pm \overline{3y - 3a} \times \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$ auf der einen Seite der Gleichung allein lasse. Wenn dieses geschehen ist, so quadrire ich die beyden Glieder, und bekomme . . . . $\frac{1}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^3y + \frac{105}{4}aayy - 54ay^3 + 36y^4 = \overline{9yy - 18ay + 9aa} \times \overline{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, oder, durch die Abkürzung, ... $9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$. Dieses ist die Gleichung, welche aus den beyden vor-

Letzte Gleichung, zu welcher diese Gleichungen führen.

vorhergehenden Gleichungen entstehet, und welche man auflösen müßte, wenn man zu der Auflösung der Aufgabe, welche diese beyden Gleichungen gegeben, gelangen wollte. Man sieht hieraus, daß es mit den Gleichungen vom zweyten Grade, worinne mehr als eine unbekannte Größe ist, nicht so beschaffen ist, wie mit denen vom ersten Grade, als welche niemals eine letzte Gleichung von einem andern Grade geben, als von welchem sie selbst sind.

XXX.

Man kann, ohne sich die Mühe zu nehmen, die Gleichungen vom zweyten Grade aufzulösen, und hernach ihre Wurzelzeichen wegzuschaffen, eben auch zu der letzten Gleichung gelangen.

Wie man noch anders mit diesen Exempel verfährt.

Dieses zu zeigen, wollen wir die beyden vorhergehenden Gleichungen wieder vornehmen, und aus jeder den Werth von xx herausziehen. Die erste giebt . . . . $x^2=aa+2yy-ax+2xy$, und die andere $x^2=2aa-yy+2ax-xy$. Wenn man diese beyden Werthe einander gleich setzet, so bekömmt man $aa+2yy+2xy-ax=2aa-yy-xy+2ax$, und dieses giebt . . . — $x=\frac{3yy-aa}{3a-3y}$. Wenn man diesen Werth von x in einer von den beyden gegebenen Gleichungen, z. E. in $xx-2ax+xy=2aa-yy$, an die gehörigen Stellen setzet; so wird diese Gleichung also verändert, ...

$$\frac{9y^4-6aayy+a^4}{\overline{3a-3y}^2}+\frac{\overline{y-2a}\times\overline{3yy-aa}}{3a-3y}=2aa-yy.$$

$-yy$. Wenn dieses abgekürzet wird, so entstehet daraus eben die vorige Gleichung . . . . $9y^4+9ay^3-30aayy+27a^3y=11a^4$.

XXXI.

Den Anfängern den Gebrauch dieser Methode, welche in der Auflösungskunst von großem Nutzen ist, recht geläufig zu machen, wollen wir dieselbe auf folgende beyde Gleichungen anwenden:

$x^2+axy+bx=cy^2+dy+e$

$x^2+fxy+gx=hy^2+iy+k$.

Diese Gleichungen sind alle beyde so sehr verwickelt, als nur die Gleichungen vom zweyten Grade mit zwoen unbekannten Größen es seyn können.

Wenn man einen Werth von xx aus jeder von diesen beyden Gleichungen zieht, und diese Werthe einander gleich setzet; so bekömmt man $\overline{a-f}\times xy+\overline{b-g}\times x=\overline{c-h}\times y^2+\overline{d-i}\times y+e-k$. Wenn man nun, um die Rechnungen abzukürzen, macht $a-f=l$; $b-g=m$; $c-h=n$; $d-i=p$; $e-k=q$; so wird diese Gleichung in folgende verwandelt $lxy+mx=ny^2+py+q$, woraus ich herleite $x=\frac{ny^2+py+q}{ly+m}$. Diesen Werth von x setze ich in einer von den beyden gegebenen Gleichungen an die Stelle des x. Z. E. in der ersten, so bekomme ich

$$\frac{\overline{ny^2+py+q}^2}{\overline{ly+m}^2}+\frac{\overline{ay+b}\times\overline{ny^2+py+q}}{ly+m}=cy^2+dy+e,$$

oder $\overline{ny^2+py+q}^2+\overline{ay+b}\times\overline{ny^2+py+q}\times\overline{ly+m}=\overline{cy^2+dy+e}\times\overline{ly+m}^2$.

Wenn man hierauf die angezeigten Operationen vornimmt, und das Herausgekommene abkürzet und ordnet; so bekömmt man endlich

$$y^4 + \frac{bln + amn + alp + 2np - 2mlc - l^2 d}{aln + nn - l^2 c} y^3$$

$$+ \frac{bmn + qal + pbl + pam + p^2 + 2nq - m^2 c - 2mld - el^2}{aln + nn - l^2 c} y^2$$

$$+ \frac{blq + amq + bmp + 2pq - m^2 d - 2mel}{aln + nn - l^2 c} y$$

$= \frac{m^2 e - q^2 - bmq}{aln + n^2 - l^2 c}$, eine Gleichung vom vierten Grade, welche aus den beyden allgemeinsten Gleichungen vom zweyten Grade entstanden ist.

XXXII.

Wenn y zu einem jeden Grade, welcher es auch sey, x aber nur auf den zweyten Grad erhöhet wäre; so verfähre man mit den beyden Gleichungen auf eben die Art.

Wenn man solche Gleichungen, als $xxy + axy = abb$, und $xxyy + ccyx = a^4$, hätte; so würden dieselben nicht mit unter die Gleichungen vom zweyten Grade gerechnet werden können, weil das unbekannte Product von x^2 durch y drey Dimensionen, und das Product von x^2 durch y^2 vier Dimensionen hat. Aber nach der vorhergehenden Methode würde man die x aus diesen beyden Gleichungen eben so leicht wegschaffen können. Dieses zu zeigen, wollen wir setzen, α stelle vor alle aus y, und aus bekannten Größen, zusammengesetzte Größen, (sie mögen auf einen Grad steigen, auf welchen sie wollen), durch welche das x^2, in einer von den gegebenen Gleichungen, vermehret wird; β stelle alle diejenigen Größen vor, wodurch das x in eben dieser Gleichung vermehret wird, und γ stelle alle ganz bekannte Größen vor, welche auf der andern Seite eben dieser Gleichung sind;

das ist, diese erste Gleichung sey $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Eben so sey die andere $\delta x^2 + \varepsilon x = \phi$.

Aus der ersten bekömmt man $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{\alpha}$, und aus der andern $x^2 = \frac{\phi - \varepsilon x}{\delta}$. Wenn man diese Werthe einander gleich setzet; so geben sie $\gamma\delta - \beta\delta x = \phi\alpha - \varepsilon\alpha x$, woraus man bekömmt $x = \frac{\phi\alpha - \gamma\delta}{\varepsilon\alpha - \beta\delta}$. Setzet man diesen Werth von x in der Gleichung $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$ an die gehörigen Stellen, so kömmt heraus . . . .

$$\alpha \times \overline{\phi\alpha - \gamma\delta}^{2} + \beta \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \times \overline{\phi\alpha - \gamma\delta}$$

$= \gamma \times \overline{\varepsilon\alpha - \beta\delta}$. Wenn man nun in dieser Gleichung anstatt $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi$ ihre aus y und bekannten Größen zusammengesetzten Werthe setzet; so bekömmt man die gesuchte Gleichung.

XXXIII.

Wenn die x wie auch die y auf höhere Grade, als auf den zweyten, erhöhet wären, so könnte man in diesem Falle eben noch die vorhergehende Methode anwenden. Wir wollen z. E. setzen, man hätte die beyden Gleichungen $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$ und $\varepsilon x^3 + \phi x^2 + \chi x = \eta$, in welchen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi, \chi, \eta$ alle Arten von Größen, welche aus y und bekannten Größen zusammengesetzet sind, vorstellen. Erstlich muß man x^3 in jeder von diesen beyden Gleichungen nehmen, und die beyden Werthe desselben einander gleich setzen. Dieses giebt

Was man thun muß, wenn man zu der letzten Gleichung gelangen will, in dem Falle, da x auf den dritten Grad erhöhet wäre.

$$\frac{\delta - \beta x^2 - \gamma x}{\alpha} = \frac{\eta - \phi x^2 - \chi x}{\varepsilon}$$

oder $\delta\varepsilon - \varepsilon\beta x^2 - \gamma\varepsilon x = \eta\alpha - \phi\alpha x^2 - \chi\alpha x$, oder $\overline{\phi\alpha - \varepsilon\beta} \times x^2 = \overline{\gamma\varepsilon - \chi\alpha} \times x + \eta\alpha - \delta\varepsilon$, in welcher Gleichung x nur auf den zweyten Grad erhoben ist. Wenn ich hernach diese Gleichung durch αx, und die Gleichung $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$ durch $\phi\alpha - \varepsilon\beta$ vermehre; so bekomme ich die beyden Gleichungen . . . . $\overline{\phi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta} \times x^3 = \overline{\gamma\varepsilon\alpha - \chi\alpha^2} \times x^2 + \overline{\eta\alpha\alpha - \delta\varepsilon\alpha} \times x$, und $\overline{\phi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta} \times x^3 + \overline{\beta\phi\alpha - \beta^2\varepsilon} \times x^2 + \overline{\gamma\phi\alpha - \gamma\varepsilon\beta} \times x = \delta \times \overline{\phi\alpha - \varepsilon\beta}$.

Aus diesen Gleichungen bringe ich das x^3, wie aus den beyden erstern, weg, welches mir giebt . . . .

$$\alpha \times \overline{\gamma\varepsilon - \chi\alpha + \beta \times \overline{\phi\alpha - \beta\varepsilon}} \times x^2 + \alpha \times \overline{\eta\alpha - \delta\varepsilon + \gamma \times \overline{\phi\alpha - \varepsilon\beta}} \times x = \delta \times \overline{\phi\alpha - \varepsilon\beta}.$$

In dieser Gleichung steigt x nur noch auf den zweyten Grad. Diese Aufgabe ist also nunmehr auf denjenigen Fall gebracht, welcher in dem vorhergehenden §. aufgelöset worden, das ist, auf denjenigen Fall, da man zwo Gleichungen hat, in welchen die unbekannte Größe x nur auf den zweyten Grad steigt. Es ist also unnöthig, die Rechnung hier zu Ende zu bringen, weil dabey keine andere Schwierigkeit wäre, als die, welche die Länge der Rechnung verursachen würde.

XXXIV.

XXXIV.

Wenn die unbekannte Größe, welche man aus den beyden vorgegebenen Gleichungen wegbringen will, in derselben auf einen höhern, als auf den dritten Grad, erhöhet wäre; so sieht man wohl, daß man auf eine der vorhergehenden Operation ähnliche Art dieselben sogleich in zwo andere Gleichungen von einem niedrigern Grade verwandeln könnte, und daß durch dieses Mittel allezeit die unbekannte Größe gänzlich würde wegzubringen seyn.

Eben so wäre zu verfahren, wenn x noch auf höhere Grade erhoben wäre.

XXXV.

Wenn man anstatt zwoer unbekannten Größen ihrer drey hätte, wovon jede auf einen beliebigen Grad erhoben wäre; so ist klar, daß, woferne man nur auch drey Gleichungen hätte, man durch eben diese Methode zu einer letzten Gleichung gelangen würde, welche von den drey unbekannten Größen nur die eine, welche man wollte, in sich haben würde. Denn wenn man anfangs eine von den drey unbekannten Größen aus der Acht ließe, so würden zwo von den drey Gleichungen hinlänglich seyn, zu einer einzigen Gleichung zu gelangen, in welcher nur die aus der Acht gelassene unbekannte Größe, und die eine von den andern beyden unbekanten Größen wäre. Wenn man nun hernach eben das mit einer von den beyden Gleichungen, welcher man sich in der ersten Operation bedienet, und der dritten Gleichung thäte; so würde man zu einer andern Gleichung, zwischen eben denselben beyden unbekannten Größen, gelangen, das ist, die Aufgabe

Und wenn mehr als zwo unbekannte Größen da wären; so würde man auf eben diese Art zu der letzten Gleichung gelangen.

gabe würde auf denjenigen Fall gebracht seyn, da man zwo Gleichungen mit zwoen unbekannten Größen hat, woraus man endlich zu einer einzigen in einer Gleichung enthaltenen unbekannten Größe gelangen würde.

Wenn man vier Gleichungen, und vier unbekannte Größen hätte; so müßte man eben so die Frage erst auf drey Gleichungen und drey unbekannte Größen, hernach auf zwo Gleichungen und zwo unbekannte Größen, und endlich auf eine einzige Gleichung mit einer unbekannten Größe bringen. Eben so würde man verfahren müssen, wenn man noch mehr Gleichungen und unbekannte Größen hätte.

Anfangs=

Anfangsgründe der ALGEBRA.

Dritter Theil.

In welchem man einige allgemeine Grundregeln für die Gleichungen von allen Graden giebt, nebst der Methode, aus diesen Gleichungen die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade, welche sie etwan in sich haben, herzuleiten.

Wenn sich schon bey denen Gleichungen, welche höher, als auf den zweyten Grad erhöhet gewesen, indem man sie in allen Fällen hat auflösen wollen, große Schwierigkeiten gezeiget haben; so ist es doch gar leicht gewesen, über diese Gleichungen allgemeine Betrachtungen anzustellen, welche haben dienen

dienen können, ihre Natur zu entdecken, und sie in vielen besondern Fällen aufzulösen.

Da man z. E. gesehen hat, daß die Gleichungen vom ersten Grade nur eine Wurzel, und die vom zweyten Grade zwo Wurzeln haben; so hat man hieraus vermuthen müssen, daß die Gleichungen vom dritten Grade drey Wurzeln u. s. f. haben müßten: und, um sich von dieser Wahrheit zu versichern, oder vielmehr, um zu begreifen, wie eine Gleichung eben so viel Wurzeln haben kann, als sie Grade hat, so hat man das Umgekehrte von der anfangs vorgenommenen Aufgabe gesucht; das ist, anstatt die Wurzeln einer Gleichung zu suchen, hat man gesucht, was das für eine Gleichung seyn würde, deren Wurzeln gegebene Größen wären; eine Aufgabe, die unendlich leichter ist, als jene.

I.

Wie man eine Gleichung vermittelst ihr Wurzeln macht.

Wenn man z. E. eine Gleichung verlangt, in welcher der Werth von x sowohl 2, als 3, oder auch 5 seyn kann; so darf man nur folgende drey einfache Gleichungen machen:

$x - 2 = 0$; $x - 3 = 0$; $x - 5 = 0$.

Vermehret man die beyden ersten durch einander, und ihr Product durch die dritte; so bekömmt man $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, in welcher Gleichung man setzen kann $x = 2$, oder $= 3$, oder auch $= 5$. Man sieht leicht, daß ein jeder von diesen Werthen, wenn er in der Gleichung $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ an die Stelle des x gesetzet wird, die Gleichung auflösen muß, oder, welches einerley ist, daß er machen muß,

daß

daß alle Glieder dieser Gleichung verschwinden. Denn da man diese Gleichung also schreiben kann: $x-2\times x-3\times x-5=0$; so muß jeder dieser Theile, wenn derselbe gleich Null gesetzet wird, machen, daß die andern alle zugleich verschwinden, weil sie alle durch ihn vermehret werden: Nun wird aber durch die Voraussetzung, daß $x=2$, oder $=3$, oder $=5$ ist, allezeit einer von den drey Theilen $x-2$, $x-3$, $x-5$, Null gleich gemachet.

II.

Eine Gleichung hat eben so viel Wurzeln, als Grade.

Durch diese Methode sieht man, wie eine Gleichung eben so viel Wurzeln, als Grade, haben kann. Um die Sache noch allgemeiner abzuhandeln, so seyn a, b, c, d, e, die Wurzeln einer Gleichung; und folglich sind $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, $x-e=0$, die einfachen Gleichungen, aus welchen die Gleichung entstehet, deren Wurzeln diese Größen sind. Wenn man alle diese Gleichungen durch einander vermehret; so bekömmt man folgende Gleichung, ...

$$\begin{array}{llllll}
x^5 & -ax^4 & +abx^3 & -abcx^2 & +abcdx & -abcde=0, \\
 & -b & +ac & -abd & +abce & \\
 & -c & +ad & -abe & +abde & \\
 & -d & +ae & -acd & +acde & \\
 & -e & +bc & -ace & +bcde & \\
 & & +bd & -ade & & \\
 & & +be & -bcd & & \\
 & & +cd & -bce & & \\
 & & +ce & -bde & & \\
 & & +de & -cde & &
\end{array}$$

in

in welcher x die gegebenen Werthe a, b, c, d, e, zugleich haben kann.

III.

Eigenschaft der Gleichungen von allen Graden.

Es ist leicht, aus dieser Gleichung folgende allgemeine Anmerkungen über die Gleichungen von allen Graden zu ziehen:

Daß das erste Glied nichts anders ist, als die unbekannte Größe, zu der durch die Zahl der Wurzeln ausgedrückten Potenz erhoben, ohne Coefficienten:

Daß das zweyte Glied die unbekannte Größe, um einen Grad niedriger, mit einem Coefficienten, welcher der Summe der Wurzeln gleich ist, in sich hält:

Daß in dem dritten Gliede die unbekannte Größe, um zween Grade niedriger, sich befindet, nebst einem Coefficienten, welcher gleich ist der Summe aller Producte aus jeden zwoen Wurzeln:

Daß man in dem vierten Gliede ebenfalls die unbekannte Größe, um drey Grade niedriger, antrifft, mit einem Coefficienten, welcher die Summe aller Producte aus jeden drey Wurzeln ist.

Eben so wird es mit den übrigen Gliedern beschaffen seyn, bis zu dem letzten, welches zwar keine Potenz von x haben, aber das Product aller Wurzeln durch einander seyn wird. Diese Anmerkungen haben in vielen Fällen zum Grunde gedienet, wenn man entweder die Wurzeln der vorgegebenen Gleichungen hat finden,

oder

oder wenigstens verschiedene ihrer Eigenschaften entdecken wollen.

IV.

Man hat z. E. aus diesen Anmerkungen folgendes geschlossen, daß eine Gleichung, als $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$, worinne das zweyte Glied fehlet, nothwendig positive und negative Wurzeln haben muß, und daß die Summe der positiven der Summe der negativen gleich seyn muß. Denn ohne diese Bedingung würden sie einander nicht aufgehoben, und dadurch gemacht haben, daß das zweyte Glied weggefallen. Also muß in einer Gleichung vom dritten Grade, worinne das zweyte Glied fehlet, allezeit entweder eine negative Wurzel seyn, die so groß ist, als die beyden positiven Wurzeln zusammen, oder eine positive Wurzel, welche den beyden negativen Wurzeln zusammen gleich ist.

In einer Gleichung, worinne das zweyte Glied fehlet, ist die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen Wurzeln gleich.

V.

Aus eben diesen Anmerkungen hat man auch den Schluß gezogen, daß, wenn eine Gleichung kein letztes Glied hat, dieselbe wenigstens eine Wurzel haben muß, welche gleich Null ist. Dieses hätte man auch wahrnehmen können, wenn man überlegt hätte, daß eine Gleichung, als $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$, welche kein bekanntes Glied hat, allezeit durch $x = 0$ getheilet werden kann.

Eine Gleichung welche kein bekanntes Glied hat, hat wenigstens eine Wurzel gleich Null.

VI.

Wenn man in einer Gleichung die itzt angezeigten Eigenschaften wieder finden will, so sieht man wohl, daß alle Glieder dieser Gleichung auf einer

Bedingungen, welche man bey einer Gleichung beobachten muß,

um darinne die vorhergehenden Eigenschaften zufinden.

einer Seite stehen müssen, daß sie nach der unbekannten Größe geordnet seyn müssen, und daß diese unbekannte Größe im ersten Gliede keinen andern Coefficienten, als die Einheit, haben darf. Ferner, wenn einige von den Potenzen von x in der Gleichung fehlen, so muß man allezeit die andern Glieder für die sovielten annehmen, die wievielten sie seyn würden, wenn diese Potenzen nicht fehleten. Z. E. in der Gleichung $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$ ist das Glied $3x^3$ erst das dritte Glied, weil das zweyte Glied fehlet, und das Glied $4x$ ist das fünfte, weil das vierte fehlet. Wenn man also die vorhergehenden Anmerkungen auf eine solche Gleichung anwenden wollte, so würde man sagen, daß die Summe ihrer fünf Wurzeln Null sey, das ist, daß sie nothwendig negative und positive Wurzeln habe, und daß die Summe der erstern der Summe der leztern gleich sey. Ferner würde man sagen, daß die Summe der Producte von allen Wurzeln, immer von zwoen und zwoen, gleich sey -3; daß die Summe aller Producte, immer von dreyen und dreyen, 0 sey; daß die Summe aller Producte, immer von vieren und vieren, $+4$ sey, und daß endlich das Product aller Wurzeln $+5$ sey.

VII.

Eine Methode, die commensurablen Wurzeln einer Gleichung zu bekommen.

Aus der Eigenschaft, daß das lezte Glied einer Gleichung dem Producte aller Wurzeln gleich seyn muß, kann man eine Methode ziehen, alle Wurzeln zu bekommen, welche in einer Gleichung commensurabel sind. Denn man

muß

muß dieselben finden, indem man die Theilung der Gleichung durch x mit oder weniger einem jeden von den Theilern des letzten Gliedes versuchet.

Wenn man z. E. die Gleichung $x^3 - 5xx + 7x - 3 = 0$ hat, so versuche ich, da die Theiler des Gliedes -3 keine andern seyn können, als $-1, -3, +1, +3$, die Theilung durch $x-1$, $x-3$, $x+1$, $x+3$. Sie geht an mit $x-1$, und mit $x-3$; und ich sehe, daß die Gleichung auch also hätte können geschrieben werden, $\overline{x-1} \times \overline{x-1} \times \overline{x-3} = 0$, woraus ich finde, daß die vorgegebene Gleichung drey Wurzeln hat, wovon die eine $+3$, und von den andern, welche beyde einander gleich sind, jede $+1$ ist.

Wenn eine Gleichung durch keine einfache Gleichung, welche aus x und $+$ oder $-$ einem von den Theilern des letzten Gliedes besteht, kann getheilet werden, so ist man versichert, daß diese Gleichung keine commensurable Wurzel hat.

VIII.

Wider diese Methode, die commensurablen Wurzeln zu finden, zeigt sich eine Schwierigkeit, welche dem ersten Ansehen nach wichtig genug zu seyn scheinet. Sie besteht darinne, daß, wenn irgend eine Wurzel dieser Gleichung ein Bruch wäre, man nicht wissen würde, wie man sie unter den Theilern des letzten Gliedes finden sollte; weil, wenn man Brüche für die Theiler einer Zahl annehmen will, man ihrer unendlich viele finden kann. Aber es ist leicht, auf diese Schwierigkeit zu antworten, wenn man zu bedenken giebt, daß, wenn alle Coefficienten in einer In einer Gleichung,

in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind, kann die unbekannte Größe kein Bruch seyn.

Gleichung ganze Zahlen sind, der Werth der unbekannten Größe unmöglich ein Bruch seyn kann. Ich glaube, daß diejenigen, welche etwas von der Rechenkunst der Brüche verstehen, die Wahrheit dieses Satzes von sich selbst einsehen werden. Aber, um ihnen die Mittel, sich davon zu versichern, zu erleichtern, wollen wir, als ein Exempel, folgende Gleichung vornehmen, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, in welcher man voraussetzet, daß a, b, c ganze Zahlen sind. Es ist klar, daß, wenn x ein Bruch ist, x^3, x^2, auch Brüche seyn müssen, und daß der Bruch, welcher x^3 ausdrückt, niemals auf einen Bruch gebracht werden kann, welcher eben den Nenner habe, wie x^2 oder dessen Vielfaches ax^2. Und noch weniger wird eben dieser Bruch auf eben den Nenner gebracht werden können, welchen x, oder dessen Vielfaches bx hat. Folglich wird $x^3 + ax^2 + bx$ niemals einen einfachern Bruch ausmachen können, als x^3, welcher nicht weiter abgekürzet werden kann. Folglich kann x in solchen Gleichungen niemals ein Bruch seyn.

IX.

Wenn man eine Gleichung hat, deren Coefficienten Brüche sind, so kann man zwar, so lange man die Brüche darinnen läßt, nach der vorhergehenden Methode, die commensurabeln Wurzeln, welche etwan darinnen sind, nicht finden: Aber man kann die Aufgabe, durch eine ganz einfache Verwandelung, in eine andere verwandeln, in welcher die aufzulösende Glei-

chung keine Brüche mehr hat, ohne dem ersten Gliede einen Coefficienten zu geben.

Verwandelung, durch welche man die Brüche aus einer jeden Gleichung wegbringt.

Man habe z. E. die Gleichung . . . . $x^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{e}{f} = 0$ (man sieht leicht, daß bey einer Gleichung von einem höhern Grade nicht mehr Schwierigkeit seyn würde.) Wenn ich die unbekannte Größe x einer andern unbekannten Größe y, durch eine unbestimmte Zahl m getheilet, gleich setze, so verwandele ich die Gleichung in eine neue . . . . $\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{bm^2} + \frac{cy}{dm} + \frac{e}{f} = 0$ oder $y^3 + \frac{am}{b}y^2 + \frac{cm^2}{d}y + \frac{em^3}{f} = 0$, in welcher ich sehe, daß, wenn m zugleich durch b, durch d und durch f getheilet werden kann, $\frac{am}{b}$, $\frac{cm^2}{d}$ und $\frac{em^3}{f}$ ganze Zahlen sind. Dadurch wird aber die Aufgabe viel leichter gemacht. Denn das schlimmste, was noch dabey seyn könnte, wäre dieses, daß man das Product der Zahlen b, d, f für m annehmen müßte; allein wenn diese Zahlen nicht Primzahlen * unter einander sind, so wird man leicht eine Zahl finden, die kleiner ist, als ihr Product, und doch durch alle drey getheilet werden kann.

* Man nennet in der Rechenkunst diejenigen Zahlen Primzahlen, welche keine Theiler haben, als z. E. 5, 11, 31 ꝛc. und man sagt, daß zwo Zahlen Primzahlen unter einander sind, wenn sie keinen gemeinen Theiler haben, als z. E. 21 und 16, 18 und 35.

X.

Durch diese Verwandlung findet die vorhergehende Methode auch bey Gleichungen mit Brüchen statt.

Wenn die Gleichung in eine andere Gleichung ohne Bruch ist verwandelt worden, so muß man nach der vorhergehenden Methode die commensurablen Wurzeln dieser letzten Gleichung suchen, und wenn sie keine hat, so ist man sicher, daß die erste auch keine gehabt hat, weil, wenn x commensurabel ist, es niemals eine incommensurable Größe geben kann, wenn man es durch die Zahl m vermehret, welche gleichfalls commensurabel ist.

XI.

Unbequemlichkeit der vorhergehenden Methode.

Die vorhergehende Methode hat diese beträchtliche Unbequemlichkeit, daß, wenn das letzte Glied viel Theiler hat, die Rechnungen, welche man anstellen muß, um alle Theilungen, welche diese Methode vorschreibt, zu versuchen, so langweilig sind, daß man diese Methode billig würde fahren lassen, ungeachtet sie den unendlichen Vortheil hat, daß sie sich überhaupt auf Gleichungen von allen Graden erstrecket, in welchen eine oder mehrere Wurzeln commensurabel sind. Hierdurch sind die geschicktesten Analysten bewogen worden, diese Methode zu verbessern, indem sie leichtere Mittel, als die Theilung, gesucht haben, diejenigen Theiler, die sich nicht schicken, zu erkennen. Sie haben es folgendermaaßen angegriffen.

XII.

Betrachtungen, durch welche man diese

Man hat erstlich angemerket, daß, wenn man in einer Wurzel $x+a$ einer jeden Gleichung, oder, welches einerley ist, in dem Theiler $x+a$ einer

einer jeden Größe, das x einer gegebenen Zahl gleich machte, die Zahl, in welche solchergestalt die Wurzel verwandelt würde, ein Theiler der vorgegebenen Größe seyn müßte, in welcher man x eben derselben Zahl gleich gemacht hätte; das ist, wenn man z. E. die Größe $x^3 - 2x - 21$ hat, wovon man weis, daß $x - 3$ ein Theiler ist, und man macht $x = 5$, so muß die Zahl 94, die durch diese Voraussetzung aus $x^3 - 2x - 21$ wird, nothwendig durch die Zahl 2, welche aus $x - 3$, durch eben diese Voraussetzung wird, theilbar seyn. Methode verbessert hat.

Man ist weiter gegangen, und hat in der Größe, für welche man einen Theiler suchte, x nach und nach verschiedenen solchen Zahlen, wie z. E. $+1, 0, -1$ sind, gleich gesetzet. Man hat mit diesen Voraussetzungen den Anfang gemacht, weil sie die leichtesten Substitutionen geben. Hernach hat man alle Theiler derer Zahlen gesucht, in welche die vorgegebene Größe durch diese Substitutionen verwandelt wird, und man hat folgende Anmerkungen gemacht, welche sich nach der vorhergehenden von sich selbst ergaben.

1) Daß man unter allen Theilern der Zahl, welche dadurch entstanden, daß man $x = +1$ in der Größe gesetzet, die Zahl $1 + a$ finden müsse, weil $x + a$ der gesuchte Theiler war.

2) Daß unter allen Theilern, welche man bekömmt, wenn man $x = 0$ setzet, und welche nichts anders sind, als die Theiler des letzten Gliedes der vorgegebenen Größe, die Zahl a seyn müsse.

3) Daß unter allen Theilern der Zahl, welche man bekömmt, wenn man $x = -1$ setzt, die Zahl $-1+a$ seyn müsse.

XIII.

Grundsatz zu Findung der commensurablen Wurzeln.

Da nun die Zahlen $1+a, a, -1+a$ nothwendig also beschaffen sind, daß die erste um Eins größer ist, als die zweyte, und die zweyte auch um Eins größer ist, als die dritte, so war es leicht, hieraus diesen Grundsatz zu ziehen, daß von allen Theilern der Zahl, welche man bekömmt, wenn man $x = 0$ setzet, keiner die verlangte Zahl a seyn kann, wenn er nicht zugleich um Eins kleiner ist, als einer von den Theilern der Zahl, welche man bekömmt, wenn man $x = 1$ setzet, und um Eins größer ist, als einer von den Theilern der Zahl, welche man bekommen hat, da man $x = -1$ gesetzet hat. Man sieht wohl, daß man durch diesen Grundsatz bey Aufsuchung der commensurablen Wurzeln viel unnütze Theilungen überhoben seyn kann.

Wenn man unter den Theilern der Zahl, welche man bekommen, da man $x = 0$ gesetzet hat, verschiedene Zahlen findet, welche die itzt bemerkten Bedingungen haben, so muß man ferner $x = 2$ setzen, und sehen, ob man unter den Theilern der Zahlen, welche alsdenn herauskommen, Zahlen findet, die um Eins größer sind, als diejenigen, welche man bekommen, da man $x = 1$ gesetzt, und so ferner.

Uebrigens sieht man wohl, daß man eine doppelte Untersuchung mit diesen Theilern anstellen

muß,

muß, das ist, daß jeder sowohl mit — als mit + muß genommen werden.

XIV.

Zur Erläuterung dieser Methode, und zur Erleichterung ihres Gebrauches, wollen wir einige Exempel davon geben, und die Ordnung zeigen, welche man bey der Rechnung beobachten muß, damit man sich nicht darinnen irre, und damit man dem Ausrechner so viel Mühe, als möglich, erspare.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel.

Man soll in der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$ die commensurablen Wurzeln finden, oder, welches einerley ist, man soll die Theiler von einer Dimension in der Größe $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ finden.

Erstlich schreibe ich (man sehe in der beygefügten Tafel das 1. Feld) die Zahlen 1, 0, —1, welchen ich x gleich setzen will, unter einander. Hernach schreibe ich neben einer jeden von diesen Zahlen —8, +6, +16, oder bloß 8, 6, 16, (weil die Zeichen bey den Theilern gleichgültig sind) in welche, wegen dieser Voraussetzungen, nach und nach die Größe $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ verwandelt wird. Diese Zahlen sondere ich von den erstern durch einen Strich in die Länge ab. In eine dritte Columne setze ich die Zahlen 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16, welche die Theiler der vorhergehenden Zahlen sind, und zwar die vier ersten neben 8, wovon sie die Theiler sind, die vier andern neben 6, und die fünf letzten neben 16.

Wenn dieses geschehen ist, so suche ich unter

den Theilern 1, 2, 3, 6 der Zahl 6, welche da durch entstanden ist, daß ich $x = 0$ gesetzet habe, denjenigen, welchen man zu x hinzusetzen oder davon abziehen muß, um den gesuchten Theiler zu bekommen, oder vielmehr ich bemühe mich, von allen diesen Theilern diejenigen auszuschliessen, welche nicht die erforderlichen Bedingungen haben. In dieser Absicht bemerke ich erstlich, daß 1, welches der erste von diesen Theilern ist, nicht angenommen werden kann, man mag ihn mit + oder mit — nehmen. Denn wenn man es mit + nähme, das ist, wenn man $x + 1$ als den gesuchten Theiler betrachtete, so würde dieser Theiler 2 werden, wenn man $x = + 1$ voraussetzte, und er würde 0 werden, wenn man $x = - 1$ setzte. Folglich würde man zugleich 2 unter den Zahlen der ersten Reihe, und 0 unter den Zahlen der dritten Reihe finden müssen: Nun findet aber die zweyte von diesen Bedingungen nicht Statt. Daß — 1 ebenfalls nicht angeht, das ist, daß $x - 1$ nicht der gesuchte Theiler ist, ist eben so klar; denn, weil dieser Theiler, wenn man $x = + 1$ setzte, 0 würde, und weil er, wenn man $x = - 1$ setzte, — 2 würde, so müßte man unter den Zahlen der ersten Reihe 0, und unter den Zahlen der zweyten Reihe 2 finden. Es hat aber nur die zweyte von diesen beyden Bedingungen Statt. Hierau sehe ich, daß der Theiler 2 auch nicht kann ge nommen werden, weil, wenn man ihn mit + nimmt, das ist, wenn man $x + 2$ als den ge suchten Theiler betrachtet, man + 3 bekomm

würd

würde, wenn man $x = 1$ setzte, und weil man $+ 1$ bekommen würde, wenn man $x = -1$ setzte; woraus folgen würde, daß man die Zahl 3 in der ersten, und die Zahl 1 in der dritten Reihe finden müßte. Nun aber geschieht hier von diesen beyden Bedingungen der ersten keine Genüge. Und wenn man 2 mit $-$ nähme, das ist, wenn man wollte, daß $x - 2$ der Theiler wäre, so würde man $- 1$ und $- 3$ bekommen, wenn man $x = + 1$ und $x = - 1$ setzte; daher man denn zugleich 1 in der ersten, und 3 in der dritten Reihe finden müßte, von welchen Bedingungen nur die erste Statt hat.

Nachdem ich 1 und 2 ausgeschlossen habe, so nehme ich den Theiler 3, und ich sehe, daß, wenn ich ihn mit $+$ nehme, das ist, wenn ich $x + 3$ als den gesuchten Theiler betrachte, man, wenn man $x = + 1$ setzt, $+ 4$, und wenn man $x = - 1$ setzt, $+ 2$ finden muß. Nun finde ich wirklich 4 in der ersten, und 2 in der dritten Reihe. Folglich hat $+ 3$ die erforderlichen Bedingungen. Ich schreibe es demnach in die zweyte Reihe, das ist, der Zahl gegenüber, deren Theiler es ist, und zugleich schreibe ich die Zahlen $+ 4$ und $+ 2$ in die obere und untere Reihe; nicht, weil etwan diese Zahlen zu x sollen hinzugesetzt werden, um Theiler der vorgegebenen Größe abzugeben, sondern weil, da ich mit der Untersuchung der Theiler noch nicht zu Ende bin, sich noch andere Zahlen, als $+ 3$, finden könnten, welche die erforderlichen Eigenschaften hätten, und weil man alsdenn wieder an-

andere Voraussetzungen machen müßte, um zu sehen, welche von diesen Zahlen man noch auszuschließen hätte. Ich untersuche nunmehr, ob 3 mit — nicht etwan eben so gut angeht, als mit +, das ist, ob $x - 3$ nicht etwan eben die Bedingungen hat, um ein Theiler der vorgegebenen Größe zu seyn. Man müßte demnach -2 und -4 finden, wenn man $x = +1$, und $x = -1$ annähme. Nun findet man aber wirklich diese Zahlen. Folglich hat $x - 3$ bis itzo noch eben die nöthigen Bedingungen, um ein Theiler zu seyn, als $x + 3$. Ich schreibe also in eine fünfte Columne unter einander $-2, -3, -4$.

Endlich untersuche ich die 6, und ich sehe, daß, wenn ich sie mit + nähme, ich $+7$ und $+5$ in der Reihe darüber und darunter finden müßte; welches aber nicht geschiehet; und wenn ich sie mit — nehme, so sollte ich -5 und -7 in eben diesen Reihen finden, welches ebenfalls nicht geschieht. Ich schließe also daraus, daß nur $x - 3$, und $x + 3$ solche Theiler der vorgegebenen Größe seyn können, welche commensurabel und von einer Dimension sind.

Um zu erfahren, ob man eben so viel Grund hat, die Theilung durch $x - 3$, als durch $x + 3$ zu versuchen, so bemerke ich, daß, wenn man eine vierte Reihe machte und $x = -2$ setzte, man -5 für das vierte Glied in der Columne -2 -3 -4, und $+1$ für das vierte Glied in der Columne $+4$ $+3$ $+2$ finden müßte. Denn es ist klar, daß der Theiler $x - 3$, wenn man $x = -2$ setzte, -5 werden würde, und daß der

der Theiler $x+3$, wenn man eben dieses voraussetzte, $+1$ werden würde. Wenn man aber in der vorgegebenen Größe $x^3-2x^2-13x+6$ setzet $x=-2$, so wird daraus 16, welche Zahl nicht durch 5, wohl aber durch 1, getheilet werden kann. Folglich kann $x-3$ kein Theiler dieser Größe seyn; folglich, wenn sie einen hat, so kann es kein anderer, als $x+3$ seyn, oder, welches einerley ist, wenn $x^3-2x^2-13x+6$ eine commensurable Wurzel hat, so kann es keine andere seyn, als -3. Um zu erfahren, ob sie es wirklich ist, theile ich $x^3-2x^2-13x+6$ durch $x+3$, welches angeht, und mir zum vollkommenen Quotienten $xx-5x+2$ giebt.

XV.

Damit dieses Exempel durch die Einförmigkeit desto deutlicher werden möchte, so habe ich unter den Theilern 1, 2, 3, 6 der Zahl 6, welche herauskömmt, wenn man $x=0$ setzet, auch die Zahl 1, so wie die andern, untersucht. Aber man kann allemal der Mühe überhoben seyn, diese Zahl zu untersuchen, weil, wenn es damit angienge, es sey mit $+$ oder mit $-$, man es schon hätte erfahren müssen, da man $+1$ oder -1 in der gegebenen Gleichung an die Stelle des x gesetzt hätte.

Bey diesen so einfachen Zahlen, wie 8, 6, 16 sind, war es leicht, keinen von ihren Theilern aus der Acht zu lassen, weil diese Zahlen wenig Theiler haben. Aber wenn man Zahlen hat, welche viel Theiler haben, so muß man sie mit einer gewissen Ordnung suchen, um sie alle zu bekom-

bekommen. Ein einziges Exempel wird genug seyn, zu zeigen, wie man dieses verrichten muß.

XVI.

Wie man alle Theiler einer Zahl bekömmt.

Man soll alle Theiler der Zahl 120 suchen. Erstlich mache ich einen Strich in die Länge (man sehe das 2 Feld der folgenden Tafel) zur linken Seite dieser Zahl. Hernach schreibe ich zur Linken neben diesem Striche, in der Höhe von 120, Eins, als welches der erste Theiler dieser Zahl ist. Hernach versuche ich, ob ich 120 durch 2 theilen kann. Weil dieses angeht, so schreibe ich 2 hin, und setze es zur Linken neben dem Striche, in der Höhe von 60, welches der aus dieser Theilung entstehende Quotient ist, den ich zur rechten Seite eben dieses Striches setze.

Ich versuche noch einmal die Theilung durch 2. Sie gelingt, und giebt 30 zum Quotienten. Hierauf setze ich den neuen Theiler 2 unter den vorhergehenden, und 30 unter 60. Ich vermehre zugleich den neuen Theiler 2 durch den darüber stehenden Theiler 2, und setze das Product 4 zur linken Seite der letztern 2, indem es ein neuer Theiler der vorgegebenen Zahl 120 ist. Die Ursache dieser Vermehrung ist diese, daß, wenn 120 durch 2, und auch die Hälfte davon durch 2 theilbar ist, diese Zahl 120 auch durch 4 theilbar seyn muß.

Da 30 durch 2 getheilet werden kann, so schreibe ich noch einmal 2 zur Linken des Striches und in die vierte Zeile, und den Quotienten 15 zur rechten in eben diese Zeile. Ich vermehre zugleich den neuen Theiler 2 durch 4, wel-

ches

1. Feld.

$x^3 - 2x^2 - 13x + 6$

1	8	1.2.4.8	+4	−2
0	6	1.2.3.6	+3	−3
−1	16	1.2.4.8.16	+2	−4
−2	16		+1	

2. Feld.

1	120
2	60
4.2	30
8.4.2	15
24.12.6.3	5
120.60.40.30.20.15.10.5	1

3. Feld.

$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$

1	165	1.3.5.11.15.33.55.165	+3	−11
0	120	1.2.3.4.5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.60.120	+2	−12
−1	221	1.13.17.221	+1	−13

4. Feld.

$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$

2	74	
1	30	1.2.3.5.6.10.15.30
0	36	1.2.3.4.6.9.12.18.36
−1	40	1.2.4.5.8.10.20.40

		−1	
	−1	−2	
+3	−2	−3	+10
+2	−3	−4	+9
+1	−4	−5	+8

5. Feld.

$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$

1	1	1	1	−2, 0
0	21	1.3.7.21	0	−21, −7, −3, −1, +1, +3 +7, +21
−1	65	1.5.13.65	1	−66, −14, −6, −2, 0, +4, +12, +64
−2	125	1.5.25.125	4	−129, −29, −9, −5, −3, +1, +21, +121
−3	147	1.3.7.21.49.147	9	−156, −58, −30, −16, −12, −10, −8, −6, −2, +12, +40, +138

−2	−2	0	0	0
−1	+1	−7	−3	−1
0	+4	−14	−6	−2
+1			−9	−3
			−12	

Ich schreibe in eine erste Columne unter einander 1, 0, — 1, (das 3. Feld der folgenden Tafel) als Werthe, welche nach und nach dem x sollen gegeben werden. In eine zweyte Columne schreibe ich unter einander die Zahlen 165, 120, 221, welche man findet, wenn man diese Werthe in der Größe . . . .
$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$
an die zugehörigen Stellen setzet. In eine dritte Columne schreibe ich die Theiler dieser drey Zahlen. Dieses giebt mir folgende drey Reihen
1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165;
1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120;
1, 13, 17, 221;
von welchen ich jede derjenigen Zahl gegen über schreibe, aus welcher sie entstanden ist. Wenn dieses geschehen ist, so untersuche ich unter den Theilern von 120, ob erstlich die Zahl 2 die erforderlichen Bedingungen hat, und ich sehe, daß, wenn ich sie mit + nehme, sie sich zu den oben und unten genommenen Zahlen 3 und 1 schicket. Ich schreibe also in die vierte Columne unter einander + 3, + 2, + 1.

Ich sehe hernach, daß es mit eben dieser Zahl, wenn man sie mit — nimmt, nicht angeht, weil alsdenn unten — 3 seyn müßte; welches sich aber nicht also befindet.

Wenn ich hernach auf eben diese Art alle übrigen Theiler von 120 durchgehe, so finde ich noch die Zahl 12, welche, wenn sie mit — genommen wird, die erforderlichen Eigenschaften hat, wofern man die Zahlen 11 und 13, welche darüber

darüber und darunter sind, mit — nimmt. Ich schreibe also in eine fünfte Columne unter einander die drey Zahlen -11 -12 -13.

Damit ich nun erfahre, bey welcher von den beyden letzten Columnen ich stehen bleiben muß, oder vielmehr, mit welcher von den beyden Größen $x+2$ oder $x-12$ ich die Theilung versuchen soll, so bemerke ich, daß, wenn die erstere die rechte wäre, man Null finden müßte, wenn man in der Gleichung -2 für x setzte; welches aber nicht also ist. Man kann also die Theilung nur durch $x-12$ versuchen. Ich versuche sie; sie geht an, und giebt mir zum Quotienten $x^4 + 5x^2 - x + 10$. Also ist $+12$ in der gegebenen Gleichung einer von den Werthen von x, und der einzige commensurable Werth davon.

XVIII.

Dritte Anwendung der Methode, die commensurablen Wurzeln zu finden.

Wir wollen noch folgende Größe vornehmen, $x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$. Ich schreibe (das 4. Feld der folgenden Tafel) in eine erste Columne die Werthe $1, 0, -1$, welche x bekommen soll. In eine zweyte schreibe ich die Zahlen 30, 36, 40, in welche die vorgegebene Größe durch diese Voraussetzungen verwandelt wird, und in eine dritte schreibe ich alle die Theiler 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 der Zahl 30, die Theiler 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 der Zahl 36, und die Theiler 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 der Zahl 40. Ich finde, daß sich aus allen diesen Theilern vier Columnen machen lassen, welche die erforderlichen Bedingungen haben. Die erste Columne ist $+3, +2, +1$, die zweyte

$-2, -3, -4$, die dritte $-3, -4, -5$, die vierte $+10, +9, +8$.

Damit ich nun erfahre, welche von diesen vier Columnen die rechte ist, so mache ich erstlich $x = 2$, und setze 2 über 1 in der ersten Columne. Hernach schreibe ich in die zweyte Columne 74, in welche Zahl die vorgegebene Größe verwandelt wird, wenn ich $x = 2$ setze. Wenn dieses geschehen ist, so sehe ich, ohne mir die Mühe zu geben, die Theiler dieser Zahl zu suchen, daß ich die beyden Columnen, $+3, +2, +1$ und $+10 +9 +8$, nicht brauchen kann. Denn wenn die erstere Statt hätte, so müßte man $+4$ unter den Theilern von 74 finden; welches aber nicht ist. Wenn die letztere die rechte wäre, so müßte man $+11$ unter eben diesen Theilern finden; welches ebenfalls nicht ist.

Hingegen sehe ich, daß die Zahlen -1 und -2, welche die Columnen $-2, -3, -4$, und $-3, -4, -5$, erfordern, Theiler von 74 sind Ich schreibe also in der zweyten und dritten Columne die Zahlen -1 und -2 über -2 und -3, und suche hernach noch eine von diesen beyden Columnen, $-1, -2, -3, -4$, und $-2, -3, -4, -5$, auszuschließen. Dieses geht sehr leicht an, weil, wenn die erste Columne beybehalten werden sollte, man, indem man $x = 3$ setzte, 0 finden müßte, welches aber nicht geschieht; da hingegen -1, welches vermöge der Columne $-2, -3, -4, -5$ ein Theiler der Zahl, welche herauskömmt, wenn man $x = 3$ setzet, seyn soll, nothwendig einer seyn muß. Folglich darf

darf man es mit keiner Columne mehr versuchen, als mit der Columne — 1, — 2, — 3, — 4, — 5, das ist, man darf es mit keinem Theiler mehr versuchen, als mit $x - 4$. Ich versuche wirklich die Theilung der vorgegebenen Größe durch $x - 4$. Sie geht an, und giebt mir zum Quotienten $x^5 + 3x^3 - 5x - 9$. Also ist $+4$ einer von den Werthen von x, und zwar der einzige commensurable, in der vorgegebenen Gleichung.

XIX.

Nachdem man gesehen, wie man aus den Gleichungen von einem jeglichen Grade die commensurablen Gleichungen vom ersten Grade, welche Wurzeln derselben sind, ziehen kann, so war es natürlich, daß man sich auch bemühte, die Gleichungen vom zweyten Grade, welche etwan darinne stecken möchten, herauszuziehen. Man konnte sich daraus einen eben so großen Nutzen versprechen, weil man die Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade eben so vollkommen hat, als die Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

Methode, die in einer gegebenen Gleichung befindlichen commensurablen Gleichungen vom zweyten Grade zu finden.

Man hat, in dieser Absicht, folgende Methode ausgedacht. Es sey $xx + bx + c = 0$ die Gleichung vom zweyten Grade, welche eine von den Größen seyn kann, aus derer Vermehrung durch einander eine gegebene Gleichung entstanden ist. Oder, welches einerley ist, $xx + bx + c$ sey der gesuchte Theiler einer gegebenen Größe. Wenn man in diesem Theiler $x = 0$ setzet, so ist klar, daß nichts, als die Zahl c, davon übrig bleibt,

und daß diese Zahl einer von den Theilern des letzten Gliedes der gegebenen Größe seyn muß.

Wenn man hernach in dem Theiler $x^2 + bx + c$ macht $x = +1$, so verwandelt er sich in $1 + b + c$, welches einer von den Theilern der Zahl ist, welche man bekömmt, wenn man ebenfalls in der vorgegebenen Größe $x = 1$ setzt. Wenn man also alle Theiler dieser Zahl sucht, und, nachdem man sie sowohl mit + als mit — genommen, Eins davon abzieht, so muß unter allen denen, sowohl positiven, als negativen Zahlen, welche man durch diese Operation bekömmt, eine Zahl seyn, welcher $b + c$ gleich ist.

Setzet man hernach $x = -1$, sowohl in der vorgegebenen Größe, als auch in dem Theiler $xx + bx + c$, welcher hernach $1 - b + c$ wird, so sieht man, daß man, wenn man alle Theiler der Zahl, in welcher die Größe durch diese Voraussetzung verwandelt wird, sucht, und von allen diesen Theilern Eins abzieht, nachdem man sie sowohl mit —, als mit + genommen, unter allen den Zahlen, welche diese Rechnung giebt, die durch $-b + c$ ausgedrückte Zahl bekommen wird.

Da nun c die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen $b + c$ und $-b + c$ ist, so folgt, daß man unter denen drey Reihen von Zahlen, welche man bekömmt, um $b + c$, c, $-b + c$, vorzustellen, alle die Zahlen übergehen kann, welche nicht in arithmetischer Progression sind. Wenn man aber drey Zahlen in arithmetischer Progression gefunden hat, so ist klar, daß diejenige

nige Zahl, welche $x = 0$ voraussetzet, diejenige ist, welche man für c nehmen muß, und da diejenige, welche $x = 1$ voraussetzet, $b + c$ vorstellet, so bekömmt man b, wenn man die erstere von der letztern abzieht. Wenn man hernach diese beyden Zahlen an die Stelle des b und des c in $x^2 + bx + c$ setzet, so bekömmt man eine Größe, womit man die Theilung der gegebenen Größe versuchen kann, und welche die einzige ist, mit welcher man sie versuchen kann, wenn man nur eine arithmetische Progression unter allen den Reihen der Zahlen findet, welche die Theiler derjenigen Größe gegeben haben, in welcher man nach und nach $x = 1, 0, -1$ gesetzet hat. Findet man aber mehr arithmetische Progressionen, so muß man die Wahl darunter fast auf eben die Art anstellen, wie in den Fällen der einfachen Theiler, indem man neue Werthe für x annimmt, als $-2, -3$, oder $+2, +3$, ꝛc.

Denn wenn man z. E. $x = -2$, oder $x = -3$ ꝛc. in der vorgegebenen Größe annimmt, so ist klar, daß alle, sowohl positive, als negative Theiler derjenigen Zahl, welche man alsdenn bekömmt, die Größe $4 - 2b + c$, oder $9 - 3b + c$, ꝛc. worein $x^2 + bx + c$ verwandelt wird, wenn $x = -2$ oder $x = -3$ ꝛc. ist, vorstellen werden, und daß folglich eben diese Theiler alle, wenn man 4, 9, ꝛc. davon abgezogen hat, $-2b + c$, $-3b + c$ ꝛc. vorstellen werden. Da nun $-2b + c$, $-3b + c$ ꝛc. andere Glieder der arithmetischen Progreßion $b + c$, c, $-b + c$ sind, so darf man nur unter

den vorher gefundenen arithmetischen Progressionen diejenige suchen, welche auch noch bey diesen neuen Werthen von x statt findet, und sich derselben itzt erklärter maaßen bedienen, um die Zahlen b und c zu bestimmen.

XX.

Anwendung der vorhergehenden Methode.

Man soll z. E. von der Größe $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$ einen Theiler von zwo Dimensionen suchen.

Erstlich schreibe ich in eine Långencolumne (5. Feld in der folgenden Tafel) die Werthe 1, 0, —1, welche ich dem x geben will. Hernach schreibe ich in eine andere Långencolumne die Zahlen 1, 21, 65, in welche die vorgegebene Größe durch diese Voraussetzungen verwandelt wird.

Desgleichen schreibe ich in eine dritte Columne, zur Seite der ersten Zahl, ihren einzigen Theiler 1; zur Seite der Zahl 21 ihre Theiler 1, 3, 7, 21, und zur Seite der Zahl 65 ihre Theiler 1, 5, 13, 65.

Wenn dieses geschehen ist, so schreibe ich in eine vierte Columne die Zahlen 1, 0, und 1, welche die Quadrate der in die erste Columne geschriebenen Zahlen, 1, 0, —1, und folglich, wenn man eben die 1, 0, —1 für x annimmt, die Werthe von xx sind. Endlich mache ich eine fünfte Columne durch folgende Bedingungen:

1) Daß die erste Reihe, —2, 0, entstehe, wenn man 1 von 1 mit —, und von 1 mit + genommen, abzieht.

2) Daß

2) Daß die zweyte Reihe aus den Zahlen —21, —7, —3, —1, +1, +3, +7, +21 bestehe, welche nichts anders, als die daneben stehenden Theiler sind: nur sind sie hier zweymal geschrieben, einmal für das Zeichen —, das anderemal für das Zeichen +.

3) Daß die Zahlen in der dritten Reihe seyn —66, —14, —6, —2, 0, +4, +12, +64, wovon man die erstern —66, —14, —6, —2 findet, wenn man 1 von den mit — genommenen Zahlen 65, 13, 5, 1 abzieht, und die letztern 0, +4, +12, +64, wenn man 1 von eben denselben mit + genommenen Zahlen 1, 5, 13, 65, abzieht.

Um nun hernach die arithmetischen Progressionen, welche in diesen drey Reihen von Zahlen sind, zu bestimmen, so nehme ich erstlich in der ersten Reihe die Zahl —2 zum ersten Gliede einer Progression an, und hernach nehme ich nach und nach zu zweyten Gliedern alle Zahlen der zweyten Reihe. Zugleich suche ich die dritten Glieder, welche zu diesen ersten Gliedern gehören, und untersuche, welche von diesen dritten Gliedern in der dritten Reihe enthalten sind. Nun müssen aber —2 und —21 zum dritten Gliede geben —40, welche Zahl nicht in der dritten Reihe ist. Ich lasse also 21 fahren, und nehme nunmehr —7 zum zweyten Gliede an; und da es —12 zum dritten Gliede geben sollte, —12 aber nicht in der dritten Reihe ist, so lasse ich auch —7 fahren, desgleichen auch

— 3, weil dieses letztere — 4 geben sollte, welches aber auch nicht vorhanden ist.

Da aber — 1 für das dritte Glied 0 giebt, und 0 in der dritten Reihe vorhanden ist, so schreibe ich in die sechste Columne die Progression — 2, — 1, 0. Desgleichen da + 1, wenn man es zum zweyten Gliede annimmt, + 4 giebt, welches auch vorhanden ist, so schreibe ich die zweyte Progression, — 2, + 1, + 4, auf. Und da von den Zahlen + 7 und + 21 jede ein drittes Glied giebt, welches nicht in der dritten Reihe ist, so lasse ich sie fahren. Nachdem die Progressionen, welche mit 2 anfangen können, bestimmet sind, so gehe ich zu denen fort, derer erstes Glied 0 seyn könnte; und, um dieselben zu finden, so nehme ich so, wie ich es in Ansehung der 2 gemacht habe, alle Zahlen der zweyten Reihe, eine nach der andern, vor.

Anfänglich sehe ich, daß — 21 für das dritte Glied — 42 geben sollte, welches nicht in der dritten Reihe ist. Hernach sehe ich, daß — 7, — 14 giebt, welches vorhanden ist. Ich schreibe also auch die Progression 0, — 7, — 14, auf. Desgleichen, da — 3 und — 1, — 6 und — 2 geben, welche Zahlen auch da sind, so schreibe ich die Progressionen 0, — 3, — 6, und 0, — 1, — 2, hin. Die Zahlen + 1, + 3, + 7, + 21, geben kein drittes Glied, welches vorhanden wäre; folglich lasse ich sie fahren.

Damit ich nun sehe, welche von diesen Progressionen ich noch ausschließen muß, so mache ich $x = -2$, und schreibe — 2 in die erste Columne;

lumne; wobey ich dieses beobachte, daß ich zugleich setze 1) in die zweyte Columne 125, welche Zahl die vorgegebene Größe giebt, wenn man in ihr diesen Werth von x setzet; 2) in die dritte Columne die Zahlen 1, 5, 25, 125, als die Theiler von 125; 3) in die vierte Columne die Zahl 4, welche das Quadrat von -2, und der Werth von xx ist, wenn man obiges voraussetzet; 4) in die fünfte Columne die Zahlen $-129, -29, -9, -5$, welche man bekömmt, wenn man 4 von den Zahlen 125, 25, 5, 1, mit $-$ genommen, abzieht, und die Zahlen $-3, +1, +21, +121$, welche man bekömmt, wenn man 4 von eben diesen Zahlen, 1, 5, 25, 125, mit $+$ genommen, abzieht.

Hierdurch sehe ich, daß die beyden Progressionen, $-2, +1, +4$, und $0, -7, -14$, nicht zu gebrauchen sind, weil sie zum vierten Gliede $+7$ und -21 erfordern, welche Zahlen in der vierten Reihe nicht vorkommen. Da aber die drey Progressionen, $-2, -1, 0$; $0, -3, -6$; $0, -1, -2$, zu den vierten Gliedern $+1, -9, -3$, erfordern, welche Zahlen in dieser vierten Reihe vorhanden sind, so muß ich einen neuen Werth von x annehmen, um wenigstens eine von diesen drey Progressionen auszuschließen.

Ich mache also $x = -3$, welches mir 147 für diejenige Zahl giebt, in welche die Größe, wenn ich dieses voraussetze, verwandelt wird. Ich schreibe also 147 in die zweyte Columne, und daneben in die dritte setze ich die Theiler dieser Zahl, 1, 3, 7, 21, 49, 147. Desgleichen

 schreibe

schreibe ich in die vierte Columne 9, welche Zahl das Quadrat von — 3, oder der Werth von xx, bey dem von neuem für x vorausgesetzten Werthe, ist. Endlich schreibe ich in die fünfte Columne die Zahlen — 156, — 58, — 30, — 16, — 12, — 10, — 8, — 6, — 2, + 12, + 40, + 138, welche man bekömmt, wenn man 9 von den Zahlen 1, 3, 7, 21, 49, 147, mit — und mit + genommen, abzieht.

Hierdurch finde ich, daß man die Progreßionen — 2, — 1, 0, + 1, und 0, — 1, — 2, — 3, ausschliessen, und hingegen die Progreßion 0, — 3, — 6, — 9 beybehalten muß. Denn die beyden fünften Glieder der erstern beyden Progreßionen müssen + 2 und — 4 seyn, welche Zahlen nicht in der fünften Reihe sind. Hingegen das fünfte Glied der Progreßion 0, — 3, — 6, — 9 ist — 12; und dieses ist darinne.

Nachdem mir nun von allen Progreßionen, die einzige, 0, — 3, — 6 ꝛc. übrig geblieben ist, so nehme ich in dieser Progreßion die Zahl — 3, welche in der sechsten Columne steht, und Statt hat, wenn $x = 0$ ist, um das Glied c des gesuchten Theilers $xx + bx + c$ auszudrücken. Hernach nehme ich, immer noch in der sechsten Columne, 0, welches Statt hat, wenn man $x = 1$ voraussetzet, und welches, den vorhergehenden Grundsätzen zufolge, $b + c$ seyn muß. Wenn ich also c oder — 3 von 0, oder von $b + c$, abziehe, so bekomme ich + 3 für das b. Der gesuchte Theiler $x^2 + bx + c$ ist also

$xx +$

−2	0	0	0
+1	− 7	− 3	−1
+4	−14	− 6	−2
		− 9	−3
		−12	

1. Feld.

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$

2	133	1.7.19.133	4	−137, −23, −11, −5, −3, +3, +15, +129	+15	+3
1	33	1.3.11.33	1	−34, −12, −4, −2, 0, +2, +10, +32	+10	+2
0	5	1.5	0	−5, −1, +1, +5	+ 5	+1
−1	1	1	1	−2, 0	0	0
−2	3	1.3	4	−7, −5, −3, −1	− 5	−1

2. Feld.

$6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$

2	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	10
1	7	1. 7	7
0	20	1. 2. 4. 5. 10. 20	4
−1	3	1. 3	1
−2	34	1. 2. 17. 34	− 2

3. Feld.

$4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$

2	117	1.3.9.13.39.117	8	−125, −47, −21, −17, −11, −9, −7, −5, +1, +5, +31, +109	+ 5
1	5	1.5	2	−7, −3, −1, +3	− 3
0	77	1.7.11.77	0	−77, −11, −7, −1, +1, +7, +11, +77	−11
−1	153	1.3.9.17.51.153	2	−155, −53, −19, −11, −5, −3, −1, +1, +7, +15, +49, +151	−19
−2	437	1.19.23.437	8	−445, −31, −27, −9, −7, +11, +15, +429	−27

gezogen. Und so schreibe ich auch die übrigen Reihen. Wenn alle diese Zahlen geschrieben sind, so nehme ich erstlich in der fünften Reihe der fünften Columne die erste Zahl — 7, um sie zum ersten Gliede einer Progreßion zu gebrauchen. Wenn ich nun zugleich — 2 in der vierten Reihe zum zweyten Gliede annehme, so sehe ich, daß das dritte Glied + 3 seyn sollte, welche Zahl aber nicht in der dritten Reihe enthalten ist. Ich gehe also weiter zu 0, welches, da ich wiederum — 7 zum ersten Gliede annehme, + 7 für das dritte Glied geben würde; und da + 7 auch nicht in der dritten Reihe ist, so schliesse ich, daß unter den Zahlen der fünften Columne keine Progreßion ist, welche sich mit — 7 anfangen kann.

Ich nehme also — 5 zum ersten Gliede an, und sehe, daß, wenn ich — 2 zum zweyten Gliede mache, das dritte + 1 seyn muß, welches sich zwar in der dritten Reihe befindet; aber es giebt zum vierten Gliede + 4, welches nicht in der zweyten Reihe ist. Ich lasse also — 2 fahren, und nehme 0 zum zweyten Gliede an. Dieses giebt mir + 5, + 10, + 15, zum dritten, vierten und fünften Gliede; und da alle diese Zahlen in der dritten, zweyten und ersten Reihe vorhanden sind, so schreibe ich in die sechste Columne die Zahlen 15, 10, 5, 0, — 5.

Wenn ich hernach — 3 zum ersten Gliede annehme, so sehe ich, daß weder — 2 noch 0 das zweyte Glied dazu seyn kann, weil das erstere die Progreßion — 3, — 2, — 1, 0, + 1 geben

würde,

würde, wovon das letzte Glied nicht in der ersten Reihe ist, und weil das letztere die Progression $-3, 0, +3$, ꝛc. geben würde, welche gleich im dritten Gliede $+3$ nicht zutrifft, indem dieses nicht in der dritten Reihe enthalten ist.

Ich kann also nur -1 noch zum ersten Gliede annehmen. Ich gebe ihm anfangs -2 zum zweyten Gliede, mit welchem die Progreßion nicht Statt findet. Wenn ich ihm aber hernach 0 zum zweyten Gliede gebe, so bekomme ich zum dritten, vierten und fünften Gliede die Zahlen $+1, +2, +3$, welche in der dritten, zweyten und ersten Reihe sind. Ich schreibe also in die sechste Columne die Zahlen $+3, +2, +1, 0, -1$.

Wenn dieses geschehen ist, so bemühe ich mich nicht, dem x neue Werthe zu geben, um eine von den beyden Progreßionen auszuschließen; weil die gegebene Größe, da sie von vier Dimensionen ist, entweder gar keinen Theiler von zwo Dimensionen, oder zween solche Theiler zugleich haben muß. Dieses folgt daraus, daß, so bald man einen Theiler von zwo Dimensionen, für eine Größe von vier Dimensionen gefunden hat, der Quotient, welcher allezeit zugleich ein Theiler ist, auch zwo Dimensionen haben muß.

Dieser Betrachtung zufolge nehme ich eine von den beyden vorhergehenden Progreßionen, welche ich will, z. E. die erstere. Da hierinne die Zahl 5 diejenige ist, welche Statt findet, wenn man $x=0$ voraussetzet, und 10 diejenige, welche Statt hat, wenn man $x=1$ voraussetzet,

so

so bekomme ich $c=5$, und $b+c=10$, das ist, $b=5$. Der Theiler also, welchen diese Progeßion giebt, ist $xx+5x+5$. Ich theile also die vorgegebene Größe durch $xx+5x+5$, und ich sehe, daß die Theilung von statten geht, und mir zum Quotienten $xx+x+1$ giebt, welches der Theiler ist, den man durch Hülfe der andern Progreßion finden würde.

XXII.

Wenn man die Theiler einer solchen Gleichung, als z. E. $6y^4-y^3-21y^2+3y+20=0$ finden soll, worinne das erste Glied einen Coefficienten hat, welchen die Theilung der ganzen Gleichung durch diesen Coefficienten nicht wegbringen kann, so kann man sich der vorhergehenden Grundregeln bedienen, ohne genöthiget zu seyn, diese Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren erstes Glied keinen Coefficienten hat; als welches man nach der im IX. §. angezeigten Methode thun könnte.

Methode, die Theiler von einer Dimension zu finden, wenn das x einen Coefficienten hat.

Dieses zu zeigen, wollen wir erstlich untersuchen, wie es mit den Theilern von einer Dimension beschaffen ist. Es stelle $mx+a$ einen Theiler vor, welcher eine gegebene Größe theilen soll. Es ist klar, daß, wenn man x nach und nach $2, 1, 0, -1, -2$, rc gleich setzet, dieser Theiler in allen diesen Fällen werden wird $2m+a$, $m+a$, a, $-m+a$, $-2m+a$, rc. welche Größen in arithmetischer Progreßion sind, und bey denen man leicht bemerken kann,

1) Daß der Unterschied m aller Glieder der Coefficient des x in dem Theiler ist.

2) Daß

2) Daß eben dieser Unterschied m ein Theiler des Coefficienten des ersten Glieds der vorgegebenen Größe ist.

3) Daß das Glied a, welches sich auf die Voraussetzung $x = 0$ beziehet, derjenige Theil des Theilers ist, worinne kein x ist.

4) Daß eben diese in arithmetischer Progression stehenden Größen Theiler der gegebenen Größe sind, in welcher man x nach und nach 2, 1, 0, — 1, — 2, rc. gleich gemacht hat.

Dieses vorausgesetzet, muß man, wenn man die Theiler von einer Dimension einer jeden gegebenen Größe zu suchen hat, erstlich eben so verfahren, wie oben, in Ansehung der drey ersten Columnen. Hernach muß man unter allen diesen Zahlen eine Progreßion suchen, deren Unterschied ein Theiler des Coefficienten des ersten Gliedes der vorgegebenen Größe ist. Endlich, um diese Progreßion anzuwenden, muß man in $mx + a$, an die Stelle des a das Glied der Progreßion setzen, welches sich auf die Voraussetzung $x = 0$ bezieht, und an die Stelle des m muß man die Zahl setzen, welche man bekömmt, wenn man ein Glied der Progreßion, es sey welches es wolle, von dem Gliede, welches gleich über ihm ist, abzieht.

XXIII.

Anwendung dieser Methode auf ein Exempel.

Wir wollen z. E. setzen, man suche die Theiler der Größe $6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$.

Ich setze, (das 2. Feld der beygefügten Tafel) wie gewöhnlich, in die erste Columne die für x vorauszusetzende Werthen 2, 1, 0, — 1, — 2. In

die

die zweyte Columne setze ich die Zahlen 30, 7, 20, 3, 34, in welche die gegebene Größe durch diese Voraussetzungen nach und nach verwandelt wird, und endlich in die dritte Columne setze ich alle Theiler dieser Zahlen.

Wenn dieses geschehen ist, so bemühe ich mich, unter allen Zahlen der dritten Columne eine Progreßion zu entdecken, durch welche ich den gesuchten Theiler finden kann. Ich untersuche also erst die erste Zahl 1 in der ersten Reihe, und ich sehe sogleich, daß, wenn man ihr zum zweyten Gliede die Zahl 1 in der zweyten Reihe giebt, die Progreßion 1, 1, 1, ꝛc. welche da herauskömmt, nicht kann angenommen werden, weil sie nicht den gesuchten Theiler $mx + a$ vorstellen kann, als welcher nothwendig, bey den verschiedenen Werthen von x, verschieden seyn muß. Ich sehe auch, daß 7 nicht zum zweyten Gliede angenommen werden kann. Denn das dritte Glied, welches aus dieser Voraussetzung entstehen würde, würde 13 seyn, welches aber nicht in der dritten Reihe befindlich ist.

Nehme ich hernach 1 mit —, so sehe ich, daß die Zahl 1 in der zweyten Reihe nicht das zugehörige zweyte Glied seyn kann, weil das dritte Glied 3 seyn würde, welches nicht in der dritten Reihe enthalten ist. Was die Zahl 7 anlangt, so ist unnütz, zu untersuchen, ob das dritte Glied, welches diese Zahl geben würde in der dritten Reihe ist. Denn der Unterschied zwischen —1 und 7 ist 8, welche Zahl kein Theiler des Coefficienten des ersten; Gliedes der vorgegebenen

Größe

Größe ist. Folglich muß man 1, man mag es mit + oder mit — nehmen, fahren lassen.

Wenn ich auf eben diese Art alle übrigen Zahlen der ersten Reihe durchgehe, so finde ich nur die Zahl 10, welche die erforderlichen Bedingungen haben kann. Wenn ich ihr 7 zum zweyten Gliede gebe, so entstehet daraus die Progreßion 10, 7, 4, 1, — 2, deren Unterschied 3 ein Theiler des Coefficienten von $6x^3$ ist.

Nachdem ich also diese Progreßion in die vierte Columne geschrieben, so nehme ich das Glied + 4, welches sich auf die Voraussetzung $x = 0$ bezieht, um den Theil a des gesuchten Theilers auszudrücken, und indem ich eben dieses Glied + 4 von dem darüber stehenden Gliede + 7, welches $m + a$ vorstellet, abziehe, so bekomme ich + 3, welches das m ausdrücket; das ist, der gesuchte Theiler, wofern einer vorhanden ist, kann kein anderer seyn, als $3x + 4$. Ich versuche also die Theilung durch diese Größe. Sie geht an, und giebt mir zum Quotienten $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

XXIV.

Methode, die Theiler von zwo Dimensionen zu finden, wenn das x^2 einen Coefficienten hat.

Wir wollen nun die Fälle untersuchen, da die Theiler zwo Dimensionen haben sollen. Es stelle $mx^2 + bx + c$ den gesuchten Theiler einer gegebenen Größe vor. Es ist, wie oben, klar, daß das letzte Glied c ein Theiler des letzten Gliedes der gegebenen Größe, und daß m ein Theiler des Coefficienten der höchsten Potenz von x in der gegebenen Größe ist.

Man wählet also erstlich einen von den Theilern des Coefficienten des ersten Gliedes der gegebenen Größe, und macht es eben so, wie in dem XIX. §. nur mit dem Unterschiede, daß man, anstatt die Quadrate 16, 9, 4, ꝛc. abzuziehen, das Product eben dieser Quadrate durch die Zahl, welche man für m gewählet hat, abziehet; und hierdurch bekömmt man ebenfalls b und c.

Wenn die Theilung mit dem Theiler, welchen man auf diese Art bekömmt, da man nämlich in $mx^2 + bx + c$ für m die gewählte Zahl, und für b, c diejenigen Zahlen setzet, welche durch diese Wahl bestimmet worden, nicht angeht, so nimmt man einen andern Theiler des Coefficienten des ersten Gliedes der vorgegebenen Größe an, um m vorzustellen, und verrichtet die Rechnung auf eben dieselbe Art. Wenn man, nachdem man es mit allen Theilern des Coefficienten des ersten Gliedes versucht hat, keinen Theiler durch diese Methode findet, so ist man versichert, daß die vorgegebene Größe keinen hat.

XXV.

Anwendung dieser Methode auf ein Exempel.

Um eine Anwendung dieser Methode zu machen, wollen wir von der Größe $4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$ einen Theiler von zwo Dimensionen suchen. Ich schreibe, wie gewöhnlich (das 3. Feld der folgenden Tafel) in die erste Columne die Zahlen 2, 1, 0, — 1, — 2 ꝛc. welchen man nach und nach x gleich setzet; in die zweyte die Zahlen 117, 5, 77, 153, 437, in welche nach und nach die vorgegebene

bene Größe durch diese Werthe von x verwandelt wird, und in die dritte alle Theiler der Zahlen der zweyten Columne. Hernach suche ich erstlich, nach den im XIX. §. gegebenen Regeln, ob ein Theiler von zwo Dimensionen vorhanden ist, dessen erstes Glied Eins zum Coefficienten hat. Da ich aber keinen finde, so nehme ich an, daß m, das ist, der Coefficient des ersten Gliedes des Theilers, 2 sey, welches einer von den Theilern des Coefficienten 4 des ersten Gliedes von der gegebenen Größe ist.

Hierauf setze ich in die vierte Columne, anstatt der Quadrate der in der ersten Columne stehenden Zahlen, das Product eben dieser Quadrate durch 2, als den angenommenen Werth von m; das ist, ich schreibe in die vierte Columne die Zahlen 8, 2, 0, 2, 8. Hernach ziehe ich diese Zahlen von allen Zahlen in der dritten Columne, mit — und mit + genommen, ab, welches mir für die erste Reihe in der fünften Columne —125, —47, —21, —17, —11, —9, —7, —5, +1, +5, +31, +109, und für die zweyte Reihe —7—3 ꝛc. giebt. Wenn alle diese Zahlen geschrieben sind, so suche ich, wie oben, unter allen diesen Gliedern arithmetische Progreßionen, und ich finde keine, als diese, +5, —3, —11, —19, —27, welche ich in die sechste Columne schreibe. Wenn dieses geschehen ist, so nehme ich —11, welches sich auf Null bezieht, an, um die Zahl c auszudrücken. Ich ziehe diese Zahl von —3, welche darüber steht, ab, und bekomme für den Rest +8, wel-

ches b ausdrücket. Es ist also der Theiler, welchen man bekömmt, wenn man $m = 2$ voraussetzet, $2x^2 + 8x - 11$. Hernach versuche ich die Theilung, welche auch von statten geht, und zum Quotienten $2x^3 - 7$ giebt; und, ohne mir die Mühe zu nehmen, die Berechnung anzustellen, welche erfordert würde, wenn ich $m = 4$ voraussetzte, sehe ich, daß es damit nicht angeht, weil, wenn es angehen sollte, der Quotient $2x^3 - 7$ müßte können zertheilet werden, welches aber unmöglich ist. Also hat die vorgegebene Größe keinen andern Theiler von zwo Dimensionen, als $2x^2 + 8x - 11$.

XXVI.

Wenn eine Größe von weniger als sechs Dimensionen Theiler hat, so muß sie welche von weniger als drey Dimensionen haben.

Wenn man die Theiler von einer Größe suchet, welche nicht über den fünften Grad erhoben ist, so kann man sie alle durch die vorhergehenden Methoden finden. Denn sobald man sich durch diese Methoden versichert hat, daß diese Größe keinen Theiler, weder von einer, noch von zwo Dimensionen, hat, so ist man auch versichert, daß sie keinen von drey Dimensionen hat.

XXVII.

Wenn die Größe sechs oder mehr Dimensionen hat, so kann es seyn, daß sie keine andern Theiler hat, als solche, welche drey oder mehr Dimensionen haben.

Wenn aber die Größe auf sechs oder auf mehr Dimensionen steigt, so kann es seyn, daß sie sich in keine andern Größen zergliedern läßt, als in solche, welche mehr als zwo Dimensionen haben. Die Methode, welcher man sich bedienen müßte, um diese Theiler zu finden, ist beynahe auf eben die Grundregeln, wie die vorhergehenden, gegründet. Ich will mich bey der Erklärung

1. Feld.

9+15	+3
+10	+2
+ 5	+1
0	0
− 5	−1

2. Feld.

3. Feld.

+31, +109	+ 5
	− 3
	−11
+49, +151	−19
	−27

1. Feld.

$$2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10ab^2 - 6b^3$$

$10ab^2 - 6b^3$	$5a - 3b,\ 10a - 6b$	$5a - 3b$
$2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$	$2x - 3b$	$2x - 3b$
$2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$	$2x + 5a$	$2x + 5a$
		$5a + 2x - 3b$

2. Feld.

$$8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$$

$9a^2b^2 + 15ab^3$	$3a + 5b,\ 9a + 15b$	$-3a - 5b$
$8x^4 - 10bx^3$	$4x - 5b,\ 8x - 10b$	$4x - 5b$
$8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$	$4x - 3a,\ 2x + a$	$4x - 3a$
		$4x - 3a - 5b$

3. Feld.

$$16x^3 + 16bx^2 - 48ax^2 + 35a^2x - 16abx - 6a^3 + 3a^2b$$

$-6a^3 + 3a^2b$	$a,\ 3a,\ -2a + b,\ -6a + 3b$	a	$3a$	$-2a + b$
$16x^3 + 16bxx$	$x, 2x, 4x, 8x, 16x, x + b, 2x + 2b, 4x + 4b, 8x + 8b, 16x + 16b$	$-4x$	$-4x$	$x + b$
$16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$	$a - 4x,\ 3a - 4x,\ x - 2a$	$a - 4x$	$3a - 4x$	$x - 2a$
		$a - 4x$	$3a - 4x$	$x - 2a + b$

Man habe ferner $2x^5 + 5ax^4 - 3a^2x^3 - 8a^3x^2 - 20a^4x + 12a^5$. Wenn man $a = 1$ setzet, so bekömmt man $2x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 20x + 12$, wofür man $2x^2 + 5x - 3$ zum Theiler von zwo Dimensionen bekömmt. Wenn man hernach in diesem Theiler a neben 5, und aa neben 3 setzet, so kömmt $2x^2 + 5ax - 3aa$ zum Theiler von zwo Dimensionen der Größe $2x^5 + 5ax^4 - 3aax^3 - 8a^3x^2 - 20a^4x + 12a^5$ heraus.

XXIX.

In einer gleichartigen Gleichung, in welcher drey Buchstaben sind, könnte man, auch nach den vorhergehenden Methoden, ihre Theiler finden, sowohl die einfachen, als die von zwo Dimensionen: aber durch Hülfe einiger bey der Berechnung zu machenden Anmerkungen, welche sich ganz natürlich ergeben, kann man auf eine etwas bequemere Art darzu gelangen.

Methode, alle Theiler mit zween Buchstaben einer Gleichung, in welcher drey Buchstaben sind, zu finden.

Wir wollen erstlich voraussetzen, die gegebene Größe, in welcher drey Buchstaben, a, b, x, sind, solle zum Theiler eine Größe haben, in welcher nicht mehr, als zween Buchstaben, z. E. die Buchstaben x und a, sind. Weil dieser Theiler, er sey, welcher er wolle, ohne ein b in sich zu haben, die gegebene Größe, in welcher b ist, theilen kann, so muß der Werth von b, in Ansehung der Theilung, gleichgültig seyn, und diese Theilung muß eben sowohl geschehen können, wenn b Null ist. Wenn man also in der gegebenen Größe $b = 0$ macht, so muß die durch diese Vor-

Voraussetzung gegebene Größe mit der ganzen Größe den gesuchten Theiler zum gemeinen Theiler haben. Diese Frage ist also in einer andern mit enthalten, die im ersten Theile, im LXXIII. §. ausgeführet worden, wo man den größten gemeinen Theiler zwoer gegebenen Größen zu finden gelehret hat; so, daß man, nach dem, was in diesem Paragraphe gelehret worden, den gesuchten Theiler finden kann, er sey von was für einer Dimension er wolle, wenn er nur nicht mehr als zween Buchstaben hat.

XXX.

Um die Anwendung dieser Methode zu zeigen, wollen wir erstlich die Größe $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + abbx + a^4 + aabb$, vornehmen, und einen Theiler derselben suchen, worinne nur die Buchstaben a, x enthalten sind. Exempel.

Wenn man $b = 0$ macht, so kömmt $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$ heraus. Der Theiler, den diese Größe mit der ganzen Größe, oder welches auf eins hinausläuft, mit dem Reste $abbx + aabb$, gemein hat, ist $x + a$, welcher also nothwendig ein Theiler der gegebenen Größe, und zwar der größte ist, welchen sie haben kann, und worinne kein b ist.

XXXI.

Es sey $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 4a^3x^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$. Wenn man in dieser Größe $b = 0$ setzet, so bekömmt man $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - 4a^3x^2$, wovon man den größten Theiler suchen muß, den es mit der vorgegebe- Ein anderer Exempel.

nen Größe, oder, welches einerley ist, mit dem Reste $-abx^3+abbx^2+2aabx^2-2aabbx-2a^3bx+2a^3bb$, gemein hat. Das ist, man muß den größten gemeinen Theiler der Größen $x^3-4ax^2+6aax-4a^3$ und $-x^3+bx^2+2ax^2-2abx-2aax+2aab$ suchen.

Wenn es aber einen gemeinen Theiler dieser beyden Größen giebt, worinne kein b ist, so muß er auch ein gemeiner Theiler der beyden Theile $-x^3+2ax^2-2a^2x$ und $bx^2-2abx+2a^2b$ der letztern von jenen beyden Größen seyn. Da aber der gemeine Theiler dieser beyden Theile kein anderer seyn kann, als $xx-2ax+2a^2$, so untersuche ich, ob er auch $x^3-4ax^2+6aax-4a^3$ theilet, und da er es wirklich theilet, so schließe ich, daß er der gesuchte Theiler der vorgegebenen Größe ist.

XXXII.

Methode, die Theiler mit drey Buchstaben und von einer Dimension zu finden.

Jetzo wollen wir setzen, die vorgegebene Größe mit drey Buchstaben, deren Theiler man suchet, hätte keinen, worinne nur zween Buchstaben wären, oder, wenn sie dergleichen hätte, so hätte man sie schon gesuchet, und besonders gesetzet. Um nun die Theiler mit drey Buchstaben und von einer Dimension, welche sie etwan hat, zu finden, so stelle ich erstlich diesen Theiler durch $mx+na+pb$ vor, wobey ich voraussetze, daß m, n, p Zahlen andeuten. Hernach bemerke ich, daß, wenn man in diesem Theiler nach und nach a, x, b gleich Null macht, man die drey Größen $mx+pb, na+pb, mx+na$ bekömmt, welche

so

so beschaffen sind, daß die beyden Glieder, woraus eine jede bestehet, auch in den beyden andern Größen vorkommen. Z. E. $mx + pb$, welches herauskömmt, wenn man $a = 0$ setzet, besteht aus mx, welches in dem durch die Voraussetzung $b = 0$ entstandenen $mx + na$ enthalten ist, und aus pb, welches in dem durch die Voraussetzung $x = 0$ entstandenen $na + pb$ enthalten ist. Zugleich sehe ich, daß die Summe dieser drey Größen $mx + na$, $mx + pb$, $na + pb$, das Doppelte des ganzen Theilers $mx + na + pb$ ist.

Da nun diese drey Größen nothwendig Theiler derjenigen Größen sind, welche man bekäme, wenn man in der vorgegebenen Größe ebenfalls a, x, b gleich Null setzte, so folgert man daraus dieses, daß man, um die Theiler dieser Größe, welche nur bis auf eine Dimension steigen und drey Buchstaben haben, zu finden, erstlich die drey Größen, in welche sich die vorgegebene Größe, wenn man a, x, b gleich Null setzet, verwandelt, besonders schreiben, und daß man hernach neben einer jeden von diesen neuen Größen alle ihre Theiler von einer Dimension mit zween Buchstaben setzen muß. Wenn dieses geschehen ist, so muß man unter diesen drey Classen von Theilern mit zween Buchstaben drey Theiler wählen, wobey man die itzt gedachten Bedingungen beobachten muß, daß nämlich die beyden Glieder, aus welchen ein jeder von diesen Theilern besteht, in den beyden andern Theilern wieder vorkommen. Wenn man diese drey Theiler

auf diese Art gefunden hat, so wird die Hälfte ihrer Summe der Theiler der vorgegebenen Größe seyn, wenn sie einen hat.

Wenn man, um in einem von diesen drey Theilern mit zween Buchstaben die beyden Glieder zu finden, die in den beyden andern wiederum vorkommen, beyder ihre Zeichen zugleich verändern müßte, so sieht man wohl, daß diese Veränderung erlaubt seyn würde, weil überhaupt eine Größe, welche eine andere Größe theilet, sie noch theilen muß, wenn man alle ihre Zeichen verändert.

XXXIII.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel.

Um die Anwendung dieser Methode zu zeigen, wollen wir die Größe $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10abb - 6b^3$ vornehmen. Nachdem ich erstlich (man sehe die beygefügte Tafel, das I. Feld) in eine Längencolumne die drey Größen $10ab^2 - 6b^3$; $2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$; $2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$, welche diese Größe giebt, wenn man x, a, b gleich Null setzet, geschrieben, so schreibe ich in eine zweyte Columne unter einander, jeder von diesen drey Größen gegenüber, ihre Theiler mit zween Buchstaben und nur von einer Dimension. Die erste giebt $5a - 3b$ und $10a - 6b$, die zweyte nur $2x - 3b$, und die dritte $2x + 5a$. Wenn dieses geschehen ist, so sehe ich gleich, daß, wenn man von den beyden Theilern, $5a - 3b$, $10a - 6b$, den erstern $5a - 3b$ nimmt, er, mit den beyden Theilern $2x - 3b$, $2x + 5a$, die erforderliche Eigenschaft hat.

Denn

Denn dieser erste Theiler $5a - 3b$ enthält $5a$, welches in dem Theiler $2x + 5a$ wieder vorkömmt, und $-3b$, welches in $2x - 3b$ wieder vorkömmt. Ferner $2x - 3b$ enthält $2x$, welches in $2x + 5a$ wieder vorkömmt, und $-3b$, welches in $5a - 3b$ wieder vorkömmt; und endlich $2x + 5a$ besteht aus $2x$ und $+5a$, welche beyde Glieder in den beyden andern Theilern $5a - 3b$, $2x - 3b$ wieder vorkommen.

Ich setze also, nach der vorhergehenden Regel, diese drey Theiler zusammen, und bekomme $4x - 6b + 10a$, wovon die Hälfte $2x - 3b + 5a$ der gesuchte Theiler ist. Und wenn man die Theilung wirklich versuchet, so bekömmt man zum Quotienten $x^2 + ax + 2bb$.

XXXIV.

Wir wollen nunmehr die Theiler von einer Dimension und mit drey Buchstaben der Größe $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$ suchen. Nachdem ich nach und nach x, a, b in dieser Größe gleich Null gemacht, so bekomme ich die drey Größen $9a^2b^2 + 15ab^3$, $8x^4 - 10bx^3$, $8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$, welche ich (man sehe das zweyte Feld der beygefügten Tafel) in eine Columne unter einander schreibe; In eine andere Columne schreibe ich unter einander, neben einer jeden von diesen Größen, ihre Theiler von einer Dimension und mit zween Buchstaben. Die Theiler der ersten sind $3a + 5b$ und $9a + 15b$, der zweyten ihre $4x - 5b$, $8x - 10b$, und der dritten ihre $4x - 3a$ und $2x + a$. Ein ander Exempel.

Es

Es ist hernach nicht schwer, zu finden, daß die drey Theiler $3a+5b$, $4x-5b$, und $4x-3a$ die erforderlichen Eigenschaften haben, wenn man nämlich in dem ersten $3a+5b$ die Zeichen verändert, das ist, wenn man ihn also schreibt, $-3a-5b$. Ich schreibe also diese drey Theiler in die vierte Columne besonders, setze sie zusammen, und nehme die Hälfte der Summe, welches mir $4x-3a-5b$ für den einzigen gesuchten Theiler giebt, wenn es einen giebt. Ich versuche die Theilung, und finde zum vollkommenen Quotienten $2x^3+ax^2-3ab^2$.

XXXV.

In diesen beyden Exempeln haben wir die Theiler von einem Buchstaben, welche eine jede von den drey Größen in der ersten Columne gab, nicht aufgeschrieben, weil diese Theiler niemals diejenigen Größen hätten seyn können, in welche der Theiler von drey Buchstaben verwandelt wird, wenn man x, a, b gleich Null setzet, und weil wir vorausgesetzet haben, daß man sich durch die im XXIX. §. vorgetragene Methode versichert hat, daß die vorgegebene Größe keinen Theiler von zween Buchstaben habe. Wenn man aber Größen hätte, welche solche Theiler hätten, und wenn man sich nicht der im XXIX. §. angezeigten Methode bedienen wollte, so könnte man sie zugleich mit den Theilern von drey Buchstaben finden, und zwar durch eben dieselbe Methode, welche wir itzo erkläret haben, wofern

nur

nur diese Theiler auch nicht mehr als eine Dimension haben.

Es sey z. E. die Größe $16x^3 + 16bxx - 48axx + 35aax - 16abx - 6a^3 + 3a^2b$. Erstlich schreibe ich in eine erste Columne (das 3. Feld der beygefügten Tafel) die drey Größen $-6a^3 + 3a^2b$, $16x^3 + 16bxx$, $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$, in welche diese Größe verwandelt wird, wenn man x, a, b gleich Null setzet. In der zweyten Columne in die erste Reihe schreibe ich a, $3a$, $-2a + b$, $-6a + 3b$, die Theiler von einer Dimension und mit einem oder zween Buchstaben der Größe $-6a^3 + 3a^2b$. Ferner schreibe ich in die zweyte Reihe die Theiler x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$; $x + b$, $2x + 2b$, $4x + 4b$, $8x + 8b$, $16x + 16b$ der zweyten Größe $16x^3 + 16bxx$; und in die dritte Reihe schreibe ich $a - 4x$, $3a - 4x$, $x - 2a$, die Theiler der dritten Größe $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$.

Drittes Exempel, in welchem die Theiler von zween Buchstaben zugleich mit den Theilern von drey Buchstaben gefunden werden.

Wenn dieses geschehen ist, so muß man wegen der großen Menge dieser Theiler, mehr Acht haben, als in den vorhergehenden Exempeln, damit man keinen vorbeygehe, welcher die erforderlichen Eigenschaften hat; und die Ordnung, welche man dabey beobachten muß, ist fast eben dieselbe, wie die, welche bey den Theilern in Zahlen beobachtet worden. Erstlich muß man den ersten Theiler der ersten Reihe mit allen Theilern der andern Reihen vergleichen, und hernach dieses mit den übrigen Theilern der ersten Reihe

eben

eben so machen. Ich sehe sogleich, daß, wenn a ein Theil eines Theilers der Größe ist, es nur ein Theil eines solchen Theilers seyn kann, in welchem nur a und x ist, weil, wenn ein Glied mit b darinne wäre, dieser Theiler durch die Voraussetzung $x = 0$ nicht auf a würde seyn gebracht worden. Also darf ich in diesem Falle nur unter den fünf ersten Theilern, x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, eine Wahl anstellen; und da unter allen diesen Theilern nur $4x$ ist, welches, wenn man voraussetzt, daß dieser Theiler $4x$ das Zeichen — hat, in der dritten Reihe wieder vorkömmt, und da zugleich unter allen Theilern der dritten Reihe keiner, als der erste $a - 4x$ ist, welcher eben das Glied a aus der ersten Reihe in sich enthält, so schließe ich, daß, wenn a ein Theil eines Theilers ist, dieser Theiler $a - 4x$ seyn muß; welchen ich also besonders schreibe. Ich gehe hernach weiter zu $3a$, und da ich finde, daß dieses in dem Theiler $3a - 4x$ der dritten Reihe wieder vorkömmt, und daß das andere Glied $4x$ eben dieses Theilers einer von den Theilern der zweyten Reihe, nach Veränderung seines Zeichens, ist, so schließe ich, daß $3a - 4x$ auch ein Theiler der vorgegebenen Größe seyn kann, und ich setze es besonders, um damit den Versuch zu machen.

Was $- 2a + b$ anlangt, so sieht man sogleich, daß es nicht für sich alleine ein Theiler der vorgegebenen Größe seyn kann, weil, wenn dieses wäre, unter den Theilern der Größe $16x^3 + 16bxx$ das Glied seyn müßte, in welches

— 2

1. Feld.

$$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3a^3b^2$$

$-3a^3b^2$	$a^2, ab, b^2, 3a^2, 3ab, 3b^2$	b^2	$3b^2$
$x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$	$x^2 + 3b^2, x^2 + b^2$	$x^2 + b^2$	$x^2 + 3b^2$
$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$	$x^2 + ax$	$x^2 + ax$	$x^2 + ax$
		$x^2 + b^2 + ax$	$x^2 + 3b^2 + ax$

2. Feld.

1	$2ab^4 - 2a^3b^2$
2	$ab^4 - a^3bb$
$2a, a$	$b^4 - a^2b^2$
$2ab, ab, 2b, b$	$b^3 - a^2b$
$2abb, abb, 2bb, bb, b,$	$b^2 - a^2$
$2ab^3 - 2a^2b^2, ab^3 - a^2b^2, 2b^3 - 2ab^2, b^3 - ab^2, 2abb - 2aab, abb - aab, 2b^2 - 2ab, bb - ab, 2ba - 2a^2, ba - a^2, 2b - 2a, b - a$	$b + a$
$\left\{ \begin{matrix} 2ab^3 + 2a^2b^2, ab^3 + a^2b^2, 2b^3 + 2ab^2, b^3 + ab^2, 2ab^2 + 2a^2b, ab^2 + a^2b, 2b^2 + 2ab, b^2 + ab, 2ba + 2a^2, ba + a^2, 2b + 2a, b + a \\ 2ab^4 - 2a^3b^2, ab^4 - a^3bb, 2b^4 - 2a^2b^2, b^4 - aabb, 2ab^3 - 2a^3b, ab^3 - a^3b, 2b^3 - 2a^2b, b^3 - a^2b, 2bba - 2a^3, bba - a^3, 2b^2 - 2a^2, b^2 - a^2 \end{matrix} \right\}$	1

3. Feld.

$$2x^5 + 3ax^4 + b^2x^3 - a^2x^3 + 4ab^2x^2 + 6a^2b^2x + 2ab^4 - 2a^3b^2.$$

$2ab^4 - 2a^3b^2$	$a, 2a, b, 2b, b - a, 2b - 2a, b + a, 2b + 2a$ $\left.\begin{matrix} bb, 2bb, ab, 2ab, bb - aa, 2bb - 2aa, ba - aa, ba + aa, bb - ab \\ bb + ab, 2ba - 2aa, 2ba + 2aa, 2bb - 2ab, 2bb + 2ab \end{matrix}\right\}$	$\frac{ab}{xx}$	$\frac{2ab}{xx}$	$\frac{bb - aa}{2xx + bb}$
$2x^5 + b^2x^3$ $2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$	$x, xx, 2xx + bb$ $x, x^2, 2xx + 3ax - aa$	xx ——— $xx + ab$ $xx - ab$	xx ——— $xx + 2ab$ $xx - 2ab$	$2xx + 3ax - aa$ ——— $2xx + bb + 3ax - aa$

Durch diese Untersuchung findet man also die drey Theiler, $a-4x, 3a-4x, x-2a+b$, mit welchen man die Theilung versuchen muß. Ich versuche die Theilung durch den letzten, sie geht an, und giebt mir zum Quotienten $3aa-16ax+16xx$, welches ich hernach durch $3a-4x$ theile. Diese Theilung geht auch an, und giebt mir zum Quotienten den ersten Theiler $a-4x$. Folglich ist die vorgegebene Größe das Product aus diesen drey Theilern.

XXXVI.

Methode, die Theiler von zwo Dimensionen und mit drey Buchstaben zu finden.

Wenn die vorgegebene Größe keinen Theiler von einer Dimension hat, und man untersuchen will, ob sie nicht etwan Theiler von zwo Dimensionen hat, so wird man dieses leicht thun können durch Hülfe einiger Anmerkungen, welche denen ähnlich sind, auf welche die vorhergehende Methode gegründet ist. Wir wollen $mxx+nax+pbx+qa^2+rab+sbb$ den gesuchten Theiler von zwo Dimensionen vorstellen lassen. Wenn ich in dieser Größe nach und nach $x=0$, $a=0$, $b=0$ mache, so bekomme ich die drey Größen

$$qa^2+rab+sbb$$
$$mx^2+pbx+sbb$$
$$mx^2+nax+qa^2,$$

welche alle dreye Theiler derjenigen Größe sind, in welche die vorgegebene Größe verwandelt wird, wenn man darinnen ebenfalls nach und nach x, a, b, gleich Null setzet. Ferner ist ein jeder von diesen Theilern immer so beschaffen, daß diejenigen Glieder, in welchen quadrirte

1. Feld.

2. Feld.

3. Feld.

	a	$3a$	$-2a+b$
$-16b$	$-4x$	$-4x$	$x+b$
	$a-4x$	$3a-4x$	$x-2a$
	$a-4x$	$3a-4x$	$x-2a+b$

Buchstaben sind, allezeit in den beyden andern Theilern wiederholet werden, da indessen diejenigen Glieder, welche ein Product von zween Buchstaben enthalten, allezeit die einzigen in ihrer Art sind. Dieses sind also Bedingungen, nach welchen man die drey Classen der Theiler von zween Buchstaben und zwo Dimensionen, die man aus einer vorgegebenen Größe bekömmt, untersuchen muß. Wenn man also ihrer drey gefunden hat, welche diese Bedingungen haben, so darf man sie nur zusammensetzen, hernach die Hälfte von allen denen Gliedern nehmen, in welchen Quadrate sind, und diejenigen, welche nur Rectangel sind, ganz lassen.

XXXVII.

Anwendung dieser Methode auf ein Exempel.

Die Anwendung dieser Methode zu zeigen, wollen wir die Größe $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3ab^2$ vornehmen, in welcher kein Theiler von einer einzigen Dimension ist, und von welcher man einen Theiler von zwo Dimensionen sucht.

Erstlich müssen (man sehe das erste Feld der beygefügten Tafel) die drey Größen $-3a^3b^2$; $x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$; $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$, hingeschrieben werden, welche man aus dieser Größe bekommen, wenn man nach und nach x, a, b gleich Null gemacht hat, indem man sich hat versichern wollen, daß sie keine Theiler von einer Dimension habe. Hernach

nach setzet man neben diesen Größen ihre Theiler von zwo Dimensionen. Die erste giebt a^2, ab, b^2, $3a^2$, $3ab$, $3bb$; die zweyte x^2+3b^2, x^2+b^2; und die dritte nur x^2+ax. In dieser Methode kann man die Theiler, welche nur ein Glied haben, nicht fahren lassen, wenn man sich auch gleich versichert hätte, daß die vorgegebene Größe keinen Theiler mit zween Buchstaben habe; weil ein Theiler mit drey Buchstaben und von zwo Dimensionen auf ein einziges Glied heruntergesetzet werden kann, wenn man einen von den Buchstaben gleich Null setzet.

Nun muß man alle Theiler der ersten Reihe untersuchen. Ich sehe sogleich, daß der erste a^2 nicht zu gebrauchen ist, weil dieses Quadrat in den andern Reihen nicht wiederholet ist. Ich gehe hernach weiter zu ab, und daraus, daß dieser Theiler kein Glied mit aa und bb enthält, schließe ich, daß der Theiler, wovon er ein Theil seyn kann, ausser diesem Gliede nichts, als xx, ax und bx haben kann; und da ich, aus dieser Ursache, keine Vergleichung des ab mit den Theilern x^2+3b^2, x^2+b^2, machen darf, so folget daraus, daß, wenn ab ein Theil eines Theilers der vorgegebenen Größe seyn soll, dieser Theiler kein anderer seyn kann, als $xx+ax+ba$. Aber ich sehe zugleich, daß $xx+ax+ba$ kein Theiler der vorgegebenen Größe seyn kann, weil nur xx daraus würde, wenn $a=0$ gesetzet würde, und weil xx keiner von den Theilern in der zwey-

zweyten Reihe ist. Also kann ich den Theiler ab auch nicht brauchen.

Was den Theiler bb anlangt, so finde ich, daß er in dem Theiler $x^2 + b^2$ in der zweyten Reihe wiederholet ist; und da ich finde, daß eben dieser Theiler $x^2 + b^2$ mit dem Theiler der dritten Reihe das x^2 gemein hat, so schließe ich, daß $x^2 + b^2 + ax$ die Eigenschaften hat, welche erfordert werden, um damit die Theilung zu versuchen. Aber ehe ich diese versuche, gehe ich weiter zu den übrigen Theilern der ersten Reihe, und sehe erstlich, daß $3aa$ und $3ab$, aus eben der Ursache, wie a^2 und ab, nicht zu gebrauchen sind. Hernach sehe ich, daß, da $3bb$ in dem Theiler $x^2 + 3b^2$, und x^2 in $xx + ax$ wiederholet ist, auch $xx + 3bb + ax$ die Eigenschaften hat, welche erfordert werden, um damit die Theilung zu versuchen. Ich versuche hierauf diese beyden Theilungen, und ich finde, daß nur die zweyte angeht, welche mir $x^3 - 5a x^2 + b^2 x - a^3$ zum Quotienten giebt.

Anstatt alle Theiler der ersten Reihe durchzugehen, hätte man den einzigen, welcher in der letzten Reihe enthalten ist, untersuchen, und viel eher finden können, daß $x^2 + ax + b^2$ und $x^2 + ax + 3b^2$ die einzigen Theiler sind, mit welchen man den Versuch machen kann. Denn alsdenn wäre es genug gewesen, zu bemerken, daß, da in dem Theiler $x^2 + ax$ das x^2 ist, welches in $x^2 + 3b^2$ und in $x^2 + b^2$ wieder

vorkömmt, und da der eine von diesen beyden letztern Theilern $3b^2$ und der andere b^2 enthält, welche alle beyde mit unter den Theilern der ersten Reihe sind, x^2+ax+b^2 und $x^2+ax+3b^2$ die erforderlichen Eigenschaften haben, und daß sie es allein sind, weil, wenn noch andere da wären, sie entweder andere Größen, als $xx+ax$ gegeben hätten, da $b=0$ vorausgesetzet worden, oder auch andere Größen, als x^2+3b^2 und x^2+b^2, da $a=0$ vorausgesetzet worden.

XXXVIII.

Ein ander Exempel.

Wir wollen nunmehr die Theiler der Größe $2x^5+3ax^4+b^2x^3-a^2x^3+4ab^2x^2+6a^2b^2x+2ab^4-2a^3b^2$ suchen, sie mögen nun von einer, oder von zwo Dimensionen seyn, einen, zween, oder drey Buchstaben haben.

Da $2ab^4-2a^3b^2$, $2x^5+b^2x^3$, und $2x^5+3ax^4-a^2x^3$ diejenigen Größen sind, welche herauskommen, wenn man in der vorgegebenen Größe x, a, b gleich Null setzet, so muß man erstlich jeder von diesen Größen gegenüber alle Theiler setzen, welche sie etwan haben, sowohl die von einer, als auch die von zwo Dimensionen. Da die erste von diesen drey Größen ihrer gar viel hat, so muß man, damit man nicht etwan einen auslasse, sie alle in eben derjenigen Ordnung suchen, welche wir bey den Theilern mit Zahlen beobachtet haben.

Nach-

Nachdem ich (man sehe das zweyte Feld der beygefügten Tafel) diese erste Größe $2ab^4 - 2a^3bb$ besonders geschrieben, und zur Linken daneben einen Strich gemacht, auch zur Linken neben diesem Striche Eins, als den ersten Theiler der Größe, gesetzet habe, so schreibe ich 2 unter 1, weil dieses nach der Eins der einfachste Theiler ist, welchen diese Größe haben kann, und zur Rechten neben eben diesem Striche schreibe ich $ab^4 - a^3bb$. Hernach theile ich diese Größe durch a, und schreibe a zur Linken neben dem Striche, indem ich zugleich zur Rechten den Quotienten $b^4 - a^2b^2$ setze. Alsdenn vermehre ich a durch 2, welches mir $2a$ giebt. Dieses schreibe ich zur Linken neben a, als einen neuen Theiler der Größe. Hierauf theile ich $b^4 - a^2b^2$ durch b, und schreibe den Theiler b zur Linken, und den Quotienten $b^3 - a^2b$ zur Rechten. Endlich vermehre ich b durch 2, durch a durch $2a$, und schreibe zur Linken neben b die Producte $2b$, ab, $2ab$, als neue Theiler der Größe.

Anwendung der im XIV. §. angegebenen Methode, alle Theiler einer Zahl mit Buchstabengrößen zu finden.

Nachdem die Größe auf $b^3 - a^2b$ gebracht worden, so theile ich sie nochmahls durch b, welches ich wieder zur Linken schreibe, und den Quotienten $bb - aa$ setze ich zur Rechten. Ich vermehre hernach b nicht durch 2, auch nicht durch a, noch durch $2a$, weil dieses Theiler gäbe, welche ich schon gehabt habe; sondern ich vermehre es durch b und durch $2b$, welches mir die neuen Theiler von zwo Dimensionen bb und $2bb$ giebt.

Wenn ich auch Theiler von drey Dimensionen haben wollte, welche bey andern Gelegenheiten nöthig seyn können, so vermehrete ich ausserdem das b noch durch ab und durch $2ab$.

Nachdem ich nunmehr die Größe auf $bb - aa$ heruntergebracht, so sehe ich, daß sie durch $b - a$ getheilet werden kann, und daß der Quotient $b + a$ ist. Ich schreibe also jenes zur Linken, und diesen zur Rechten, und vermehre $b - a$ durch 2, durch a, durch $2a$ und durch $2b$, welches mir folgende neue Theiler von einer und von zwo Dimensionen giebt, $2b - 2a, ba - aa, bb - ab, 2ba - 2aa, 2bb - 2ab$. Wenn ich Theiler von drey und von vier Dimensionen hätte haben wollen, so hätte ich ausserdem noch $b - a$ durch $ab, 2ab, bb, 2bb, abb, 2abb$ vermehret. Da $b + a$ weiter keinen Theiler hat, als sich selbst, so setze ich es zur Linken, und vermehre es durch 2, durch a, durch b, durch $2b$, $2a$, $b - a$, $2b - 2a$, welches mir die neuen Theiler von einer und von zwo Dimensionen, $2b + 2a, ba + aa, 2ba + 2aa, bb + ab, 2bb + 2ab, bb - aa, 2bb - 2aa$, giebt. Wenn ich Theiler von drey, vier und fünf Dimensionen, das ist, alle Theiler, welche die vorgegebene Größe haben könnte, hätte haben wollen, so hätte ich ausserdem $a + b$ noch durch $ab, 2ab, bb, 2bb, abb, 2abb, ba - aa, 2ba - 2aa, bb - ab, 2bb - 2ab, abb - aab, 2abb$

— 2

$-2a^2b, b^3-ab^2, 2b^3-2ab^2, ab^3-a^2b^2, 2ab^3-2a^2b^2$, vermehret.

Wenn dieses geschehen ist, so schreibe ich (man sehe das dritte Feld der beygefügten Tafel) alle Theiler von einer und von zwo Dimensionen, $a, 2a, b, 2b, b-a, 2b-2a, b+a, 2b+2a, ab, 2ab, bb, 2bb, ab-aa, 2ba-2aa, bb-ab. 2bb-2ab, ba+aa. 2ba+2aa, bb+ba, 2bb+2ab, bb-aa, 2bb-2aa$, neben der Größe $2ab^4-2a^3b^2$, welche diese Theiler gegeben hat. Hernach schreibe ich neben der Größe $2x^5+b^2x^3$ die Theiler von einer und von zwo Dimensionen, $x, x^2, 2xx+bb$, und neben der Größe $2x^5+3ax^4-a^2x^3$ schreibe ich ihre Theiler von einer und von zwo Dimensionen, $x, x^2, 2xx+3ax-aa$.

Wenn ich alsdenn alle diese Theiler durchgehe, um zu sehen, welche diejenigen sind, die ich brauchen kann, so befinde ich gar bald, daß ich keinen einzigen von einer Dimension brauchen kann. Denn da ich in der zweyten und dritten Reihe nichts finde, welches von einer Dimension wäre, als x, so schließe ich, daß es der einzige Theiler von einer Dimension seyn muß, wofern einer möglich ist; weil, wenn der Theiler von einer Dimension entweder ein Glied mit a oder eins mit b hätte, das Glied mit a in den Theilern geblieben wäre, welche man durch die Voraussetzung $b=0$ bekommen hatte, und das mit b in

in den Theilern geblieben wäre, welche man durch die Voraussetzung $a = 0$ bekommen hatte. Aber x ist kein Theiler der vorgegebenen Größe; folglich hat sie keinen Theiler von einer Dimension. Ich gehe hernach zu den Theilern von zwo Dimensionen fort, und mache mit x^2 den Anfang, welches ich in der dritten Reihe nehme. Da ich finde, daß es auch in der zweyten Reihe ist, so schließe ich, daß, wenn es ein Theil eines Theilers ist, ihm nichts, als ein Glied mit dem Rectangel ab, fehlet, weil, wenn Glieder mit aa mit bb, mit ax, oder mit bx dabey gewesen wären, diejenigen, in welchen bb oder bx gewesen wäre, nicht weggekommen wären, da man $a = 0$ gesetzet, und diejenigen, in welchen aa oder ax gewesen wäre, nicht weggekommen wären, da man $b = 0$ gesetzet. Aber ich finde in der ersten Reihe ab und $2ab$. Folglich sind $xx + ab$, $xx + 2ab$, $xx - ab$, $xx - 2ab$ Theiler, mit welchen ich die Theilung versuchen muß.

Hierauf gehe ich weiter zu dem Theiler $2x^2 + 3ax - aa$, und finde, daß das Glied $2x^2$ in dem darüber stehenden Theiler $2xx + bb$ wiederholet ist. Zugleich finde ich, daß das Glied $- aa$ oben in verschiedenen Theilern wiederholet ist. Aber unter allen Theilern, worinnen es wieder vorkömmt, ist keiner, als $bb - aa$, worinne zugleich das Glied bb wäre, welches der Theiler $2xx + bb$ enthält. Folglich kann $2x^2 + 3ax - aa$ nur mit $2xx$

$+ bb$,

1. Feld.

$3b^2$
$3b^2$
ax

$^2 + ax$

2. Feld.

1	$2ab^4 - 2a^3b^2$
2	$ab^4 - a^3bb$
$2a, a$	$b^4 - a^2b^2$
$2ab, ab, 2b, b$	$b^3 - a^2b$
$2abb, abb, 2bb, bb, b,$	$b^2 - a^2$
$a^2, ba - a^2, 2b - 2a, b - a$	$b + a$
$a^2, ba + a^2, 2b + 2a, b + a$	1
$, bba - a^3, 2b^2 - 2a^2, b^2 - a^2$	

3. Feld.

$bb - aa$

$2xx + bb$

$xx + 3ax - aa$

$xx + bb + 3ax - aa$

$+bb$, und mit $bb-aa$, einen Theiler ausmachen, welcher die erforderlichen Bedingungen hat; und dieser Theiler, welcher $2x^2+3ax-aa+bb$ ist, muß also versucht werden. Ich sehe auch, daß ich keinen Theiler weiter suchen darf. Denn wenn auch noch einer vorhanden seyn könnte, welcher bey der bisherigen Untersuchung der Theiler der dritten Reihe nicht wäre bestimmet worden, so müßte er ein einziges Glied mit ab seyn. Man sieht aber sogleich, daß die Größe keinen Theiler hat, welcher diese Beschaffenheit hätte.

Ich versuche hierauf die Theilung durch $2xx+3ax-aa+bb$. Sie geht an, und giebt mir zum Quotienten x^3+2abb, aus welchem ich sehe, daß keine von den Größen $xx+ab$, $xx-ab$, $xx+2ab$, $xx-2ab$ die vorgegebene Größe theilen kann.

XXXIX.

Wenn die vorgegebene Größe mehr als fünf Dimensionen hätte, und wenn man, nachdem man sich versichert hätte, daß sie keinen Theiler, weder von einer, noch von zwo Dimensionen hat, die Theiler vom dritten, vierten ꝛc. Grade, welche sie etwan hat, suchen wollte, so würde man sich hierzu einer Methode bedienen, welche denen, die wir itzo erkläret haben, ähnlich wäre, und welche man sich gar leicht vorstellen kann.

Wenn die Größe, deren Theiler man sucht, mehr als drey Buchstaben hätte, so würde die Methode, ihre Theiler zu finden, gar wenig anders seyn, als die, welche bey Größen, die nur drey Buchstaben haben, statt findet. Die Anfänger mögen sich also daran üben.

XL.

Was man thun muß, wenn man die Theiler der Größen, welche nicht gleichartig sind, finden will.

Wenn man eine Größe hat, da nicht alle Glieder gleichartig sind, das ist, da die Glieder nicht alle auf einerley Dimension erhoben sind, so darf man nur erstlich alle ihre Glieder durch Hülfe eines neuen Buchstabens auf einerley Dimension bringen, und die Theiler dieser neuen Größe nach den vorhergehenden Regeln suchen. Wenn man diese Theiler gefunden hat, so muß man den neuen hineingebrachten Buchstaben wieder wegschaffen, indem man ihn Eins setzet, und durch dieses Mittel bekömmt man die gesuchten Theiler. Wenn ich z. E. die Größe $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$ habe, so vermehre ich das Glied bx^4 durch a, damit es sechs Dimensionen bekomme. Um eben dieser Ursache willen vermehre ich x^2 durch a^4, bx durch a^4, und b durch a^5. Dieses giebt mir die Größe $x^6 + bx^5 - abx^4 + a^4xx + a^4bx - a^5b$, und ich finde, nach den vorhergehenden Methoden, daß diese Größe das Product aus $xx - ab + bx$ durch $x^4 + a^4$ ist. In diesen beyden Größen, welche jene Größe durch die Vermehrung hervorbringen, setze ich $a = 1$, welches

ches mir $xx - b + bx$, und $x^4 + 1$ für die beyden Größen giebt, aus derer Vermehrung durch einander die vorgegebene Größe $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$ entsteht.

XLI.

Es giebt Fälle, da man die Theiler leichter findet, als wenn man sie nach den vorhergehenden Methoden sucht, wenn man nur ein wenig Fertigkeit im Rechnen besitzet. Hier ist ein solcher Fall, bey welchem es gut seyn wird, den Anfängern auf die Spur zu helfen.

Ein Fall, in welchem man den Theiler leichter, als durch die vorhergehen Methoden findet.

Wenn einer von den Buchstaben der vorgegebenen Größe nicht mehr als eine Dimension hat, so ist leicht zu sehen, daß nur einer unter den Theilern dieser Größe diesen Buchstaben in sich enthalten kann. Es wird also wenigstens ein Theiler vorhanden seyn, in welchem er nicht ist; und alsdenn muß man (nach der im XXIX. §. angegebenen Methode) diesen Theiler zu finden, den größten gemeinen Theiler der Glieder, in welchen dieser Buchstabe ist, und der andern Glieder, in welchen er nicht ist, suchen.

Es sey z. E. die Größe $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8a^2cx + ba$

$+ba^2c - 8a^4$. Ich suche den größten gemeinen Theiler der beyden Theile $cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$, und $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$ dieser Größe, in derer einem der Buchstabe c ist, und in dem andern nicht ist. Ich finde für dieser beyden Größen größten gemeinen Theiler $x^2 + 2ax - 2aa$; und dieses ist der gesuchte Theiler der vorgegebenen Größe.

Anfangs-

Anfangsgründe der ALGEBRA.

Vierter Theil.

Von der

Auflösung der Gleichungen von jeglichen Graden, wenn sie nicht mehr als zwey Glieder haben, oder wenn sie zwar drey Glieder haben, aber durch Hülfe der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade, auf zwey Glieder gebracht werden können; nebst verschiedenen um dieser Gleichungen willen anzustellenden Verrichtungen, z. E. der Erhöhung der Potenzen, der Ausziehung der Wurzeln, der Entwickelung der Wurzel-Großen, &c.

Nach-

Nachdem wir gesehen haben, wie man aus einer Gleichung von mehr als zween Graden die etwan darinnen enthaltenen Gleichungen vom ersten und zweyten Grade ziehet, so müssen wir auch sehen, was man gethan hat, um diejenigen Gleichungen aufzulösen, welche sich durch diese Methode nicht auflösen lassen.

I.

Von den Gleichungen vom dritten Grade mit zwey Gliedern.

Damit wir von dem Einfachsten zu dem am meisten Zusammengesetzten fortgehen, so wollen wir mit denen Gleichungen, welche nur zwey Glieder haben, den Anfang machen. Wir wollen erstlich setzen, sie wären nicht höher, als auf den dritten Grad, erhoben, z. E. $ax^3 = b$.

Man setzet eine 3 über das Zeichen $\sqrt{}$, um die Cubicwurzel auszudrücken.

Man kann sich leicht vorstellen, daß man, diese Gleichungen aufzulösen, erstlich x^3 von seinen Coefficienten losmachen, und hernach die Cubicwurzeln der beyden Glieder nehmen muß. Das Zeichen, dessen man sich bedienet, die Cubicwurzel auszudrücken, ist eben dasjenige, dessen man sich bey der Quadratwurzel bedienet: aber zum Unterschiede setzet man eine 3 darüber.

Wenn man also den Werth von x, welchen man aus der Gleichung $ax^3 = b$ oder $x^3 = \frac{b}{a}$ bekömmt, ausdrücken will, so setzet man $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Wenn z. E. $b = 1000$ und $a = 2$ ist, so bekömmt man $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

II.

Es ist zu merken, daß man hier nicht, wie bey den Quadratwurzeln, die Freyheit hat, + oder — vor das Wurzelzeichen zu setzen, sondern daß im Gegentheile die Cubicwurzel einer Größe allezeit eben dasselbe Zeichen hat, welches die Größe selbst hat. Denn der Cubus einer positiven Größe ist positiv, und der Cubus einer negativen Größe ist negativ.

Die cubischen Wurzelgrößen können nur ein Zeichen auf einmal haben.

III.

Bey dieser Auflösung fällt einem ganz natürlich eine Betrachtung ein, welche denen zu widersprechen scheint, die im Vorhergehenden über die Zahl der Wurzeln der Gleichungen angestellet worden. Denn da ein Cubus nicht mehr als eine Wurzel hat, und da diese Wurzel nicht mehr als ein Zeichen hat, so scheint es nicht, daß eine solche Gleichung, wie $ax^3 = b$, mehr als einen Werth von x gäbe. Indessen sollte man doch, nach dem, was wir oben gesehen haben, vermuthen, daß man in einer Gleichung vom dritten Grade drey Wurzeln finden müßte, so, wie man in einer Gleichung vom zweyten Grade zwo Wurzeln findet.

Was soll man aus dieser Betrachtung schliessen? Soll man diesen Grundsatz, welcher wegen seiner Allgemeinheit so schön ist, und welcher so natürlich aus der Formirung der Gleichungen folgt, welche im II. §. des dritten Theils vorgetragen worden, verwerfen? Ich will hier die Auflösung dieser Schwierigkeit aus eben dieser Formirung zeigen.

Man

Man bringe die Gleichung $ax^3 = b$ unter diese Form $x^3 - \frac{b}{a} = 0$; man bringe auch ihre Wurzel, $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ unter die Form $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$, und man theile hernach $x^3 - \frac{b}{a}$ durch $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, so wird man eine Gleichung vom zweyten Grade finden, welche die beyden andern Wurzeln enthält.

Die Rechnung desto leichter zu verrichten, wollen wir $\frac{b}{a} = c^3$ machen. Man bekömmt also anstatt der vorhergehenden Gleichungen $x^3 - c^3 = 0$, und $x - c = 0$. Wenn man die erstere durch die andere theilet, so kömmt zum Quotienten die Gleichung $xx + cx + cc = 0$ heraus, deren beyde Wurzeln durch $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$ ausgedrücket werden, und diese geben den gesuchten zweyten und dritten Werth des x in der Gleichung $x^3 = \frac{b}{a}$, sobald man an die Stelle des c seinen Werth $\sqrt{\frac{b}{a}}$ gesetzet hat.

IV.

Wenn man diesen Werth an die gehörige Stelle gesetzet hat, so bekömmt man für diese beyden Werthe von x, $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$.

Denn man sieht, daß das Quadrat von $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, das ist, das Product von $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ durch $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

seyn

seyn muß $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$, und überhaupt, daß die Vermehrung der Cubicwurzeln so, wie die Vermehrung der Quadratwurzeln, geschieht, indem man erstlich die Größen, welche unter den Wurzelzeichen sind, vermehret, und hernach dieses Zeichen vor das Product derselben setzet.

Wie man die cubischen Wurzelgrößen vermehret.

V.

Wurzeln der Gleichung vom dritten Grade mit zwey Gliedern.

Die drey Wurzeln der vorgegebenen Gleichung $ax^3 = b$ sind also $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{(-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}})}$. Die erste ist eine wirkliche, und die andern beyden sind unmögliche, doch aber allemal so beschaffen, daß man sagen kann, daß sie die vorgegebene Gleichung auflösen.

VI.

Von den Gleichungen von zwey Gliedern und von einem jeglichen Grade.

Wir wollen nun setzen, man hätte eine Gleichung mit zwey Gliedern von einem jeglichen Grade. Diese kann man auf eben die Art auflösen, indem man sich eines Wurzelzeichens bedienet, dessen Exponent der Exponent der unbekannten Größe in dieser Gleichung ist. Man hat z. E. die Gleichung $ax^m = b$, oder $x^m = \frac{b}{a}$ so bekömmt man daraus $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Wenn m eine ungerade Zahl ist, so muß diese Größe negativ seyn, so oft $\frac{b}{a}$ negativ ist, und sie muß positiv seyn, so oft $\frac{b}{a}$ positiv ist. Wenn m eine gerade Zahl ist, so hat die Wurzel das Zeichen $\pm$, wie bey dem zweyten Grade, und sie ist nur alsdenn eine wirkliche, wenn $\frac{b}{a}$ positiv ist. In dem Falle, da $\frac{b}{a}$ negativ (und m immer noch gerade) ist, sind die durch $\pm\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ ausgedrückten Wurzeln alle beyde unmöglich.

Diese Gleichungen können niemals mehr als zwo wirkliche Wurzeln haben.

Also können alle überhaupt durch $x^m = \frac{b}{a}$ ausgedrückte Gleichungen höchstens nur zwo wirkliche Wurzeln haben; die andern Wurzeln können nicht anders, als unmöglich, seyn.

Wenn man z. E. $x^4 = 256$ hat, so sind die beyden wirklichen Wurzeln $+4$ und -4; die beyden unmöglichen sind $+\sqrt{-16}$ und $-\sqrt{-16}$. In der Gleichung $x^5 = 243$ ist die einzige wirkliche Wurzel $+3$, und die übrigen sind diejenigen, welche man finden muß, wenn man die Gleichung $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$ auflöset, welche Gleichung herauskömmt, wenn man die Gleichung $x^5 - 243 = 0$ durch die Gleichung $x - 3 = 0$ theilet.

Man kann, ohne diese Gleichung aufzulösen, versichert seyn, daß ihre Wurzeln alle unmöglich sind; weil, wenn eine wirkliche darunter wä-

re,

re, sie auch $x^3 = 243$ auflösen würde, und folglich würde auch eine andere wirkliche Zahl, als 3, darunter seyn, welche, wenn sie auf die fünfte Potenz erhöhet würde, 243 gäbe.

VII.

Nach dem, was wir itzo von den Gleichungen mit zwey Gliedern gesagt haben, fehlet nun weiter nichts mehr, als daß man die Ausdrückungen der Wurzeln, welche aus diesen Gleichungen entstehen, abkürzen, oder einfacher machen könne, so oft ein Theil der Größe so beschaffen ist, daß sich aus ihm die Wurzel vollkommen ziehen läßt; oder, daß man das Wurzelzeichen gar wegbringen könne, so oft die ganze Größe eine vollkommene Potenz ist.

Betrachtungen über die Erhöhungen der Potenzen.

Diese Fälle wahrzunehmen, muß man erstlich einige Betrachtungen über das Umgekehrte der Operation, welche man unternehmen will, das ist, über die Erhöhung der Größen auf jegliche Potenzen, anstellen.

Wenn man z. E. eine Größe, als $abcd$, auf die Potenz m erheben soll, so sieht man wohl, daß $a^m b^m c^m d^m$ herauskommen wird.

Wenn man eine Größe, als $\frac{abc}{de}$, welche einen Nenner hat, auf eine jegliche Potenz erheben soll, so ist klar, daß man den Nenner, sowohl als den Zähler, auf diese Potenz, sie sey welche sie wolle, erheben muß, und daß man, wenn Coefficienten dabey wären, dieselben auf eben dieselbe Potenz erhöhen müßte. Ferner, wenn die Factoren oder Theiler der vorgegebenen Größe schon auf einige Potenzen erhöhet wären,

so würden sie alsdenn auf eine neue Potenz erhöhet werden müssen, deren Exponent gleich wäre dem Producte des Exponenten, welchen sie anfänglich gehabt, durch den Exponenten derjenigen Potenz, auf welche man sie erhöhen wollte. Also giebt $\frac{2a^2b^3}{3c^4}$, wenn es auf die Potenz 3 erhöhet wird, $\frac{8a^6b^9}{27c^{12}}$, und $\frac{a^m b^r}{c^n}$, wenn es auf die Potenz q erhöhet wird, giebt $\frac{a^{mq} b^{rq}}{c^{nq}}$. Alles dieses ist sehr klar, und folget bloß aus diesem Grundsatze, daß eine Potenz einer Größe dasjenige ist, was herauskömmt, wenn man diese Größe so viel mal, weniger ein mal, durch sich selbst vermehret, als der Exponent Einheiten enthält.

VIII.

Anwendung der vorhergehenden Betrachtungen auf die Ausziehung der Wurzeln.

Man sieht nunmehr wohl, daß zu dem Umgekehrten von dieser Operation, das ist, zu der Ausziehung der Wurzeln, nichts anders erfordert wird, als daß man die Exponenten der Theiler oder Factoren dieser Größe durch den Exponenten der Wurzel theilet, diese Theiler oder Factoren mögen in dem Zähler, oder auch in dem Nenner seyn. Wenn man z. E. die Cubicwurzel von $\frac{a^3b^6}{c^9}$ nehmen soll, so bekömmt man, wenn man die Exponenten 3, 6, 9 durch 3 theilet, und ihre Quotienten 1, 2, 3, zu eben diesen Buchstaben setzet, $\frac{ab^2}{c^3}$ für die gesuchte Cubicwurzel.

Wenn

Wenn die Größe einen Coefficienten gehabt hätte, so hätte man die Cubicwurzel desselben genommen; z. E. $\frac{8a^3b^6}{c^9}$ würde zur Cubicwurzel $\frac{2ab^2}{c^3}$ gehabt haben.

Eben so, wenn man die Biquadratwurzel von $\frac{16a^4b^8}{d^4c^{12}}$ suchet, so bekömmt man $\frac{2ab^2}{dc^3}$.

IX.

Von der Ausziehung der Wurzeln, wenn man unvollkommene Potenzen hat.

Wenn nur ein Theiler der Größe ist, aus welchem man die Wurzel ziehen kann, so zieht man sie daraus, und läßt das übrige mit dem zugehörigen Exponenten unter dem Wurzelzeichen. Man soll z. E. die Wurzel der fünften Potenz von $\frac{32a^{10}b^8}{486c^7}$ nehmen, welche Größe aus dem Producte von $\frac{32a^{10}b^5}{243c^5}$ durch $\frac{b^3}{2c^2}$ bestehet, wovon der erste Factor vollkommen die fünfte Potenz von $\frac{2a^2b}{3c}$ ist, und der andere keine Wurzel vom fünften Grade hat. Man muß also schreiben $\frac{2a^2b}{3c}\sqrt[5]{\frac{b^3}{2c^2}}$.

Eben so ist von $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ die Cubicwurzel $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{b+2c}{2d}}$, weil $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ das Product von $\frac{8a^3}{27}$ durch $\frac{b+2c}{2d}$ ist, und weil die erste von diesen beyden Größen ein vollkommener Cubus, nämlich der von $\frac{2}{3}a$, ist, und die andere keine Cubicwurzel hat.

Auf eben die Art ist $\sqrt[5]{\frac{32a^9 + 128a^6b^3 - 160a^5b^4}{3b^6}}$
$= \frac{2a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^4 + 4ab^3 - 5b^4}{3b}}$.

X.

Wenn die Größe, aus welcher die Wurzel ausgezogen werden muß, so, wie die vorhergehenden, aus verschiedenen Gliedern zusammengesetzet ist, und wenn man, nachdem man die gemeinschaftlichen Größen, welche vollständige Potenzen sind, von allen ihren Gliedern abgesondert hat, vermuthet, daß das Uebrige eine vollständige Potenz einer commensurabeln aus verschiedenen Gliedern zusammengesetzten Größe seyn könne, so wird die Operation, welche man anstellen muß, um sich davon zu versichern, schwerer seyn. Die bey dieser Operation zu beobachtende Methode zu finden, wollen wir erstlich einige Betrachtungen über die umgekehrte Aufgabe, das ist, über die Erhöhung zusammengesetzter Größen zu gegebenen Graden anstellen, und hernach die Grundregeln daraus herleiten, nach welchen man die Wurzeln aus solchen Größen ausziehen muß.

Wir wollen erstlich untersuchen, wie sich aus der Erhöhung zum Cubus die Methode, die Cubicwurzeln auszuziehen, herleiten läßt. Hernach wird man sehen, daß die andern Grade die Schwierigkeit nicht vergrößern, ausser in Ansehung der weitläuftigern Rechnungen.

XI.

Wir wollen unter allen zusammengesetzten

Größen

Größen die einfachste $u+z$ nehmen, und diese Größe auf den Cubus erhöhen. Erstlich bekömmt man für ihr Quadrat $uu+2uz+zz$, und wenn man dieses Quadrat durch die einfache Potenz vermehret, so bekömmt man endlich den Cubus $u^3+3uuz+3uzz+z^3$. Aus diesem sehe ich, daß eine jede aus zwo Theilen zusammengesetzte Größe, wenn sie auf den Cubus erhöhet wird, geben müsse, erstlich den Cubus des ersten Theiles, hernach das dreyfache Product des Quadrates des ersten Theiles durch den andern Theil, ferner das dreyfache Product des ersten Theiles durch das Quadrat des andern Theiles, und endlich den Cubus des andern Theiles.

Woraus der Cubus einer binomischen Größe besteht.

XII.

Methode zu Ausziehung der Cubicwurzel aus zusammengesetzten Größen.

Wenn man also eine Größe hat, aus welcher man die Cubicwurzel ausziehen will, so muß man erstlich darinnen ein Glied suchen, welches ein Cubus ist; dieser Cubus wird das u^3 vorstellen. Daneben muß man seine Wurzel schreiben, welche das u vorstellet; hernach muß man das Quadrat dieser Wurzel dreyfach nehmen, und es zum Theiler desjenigen brauchen, was von der gegebenen Größe, von welcher man den Cubus der zuerst gesetzten Wurzel abgezogen hat, noch übrig ist. Der aus dieser Theilung entstehende Quotient wird der zweyte Theil der Wurzel seyn, und das z vorstellen. Diesen Quotienten schreibt man zur Seite des ersten Gliedes, hernach vermehret man dieses letzte Glied durch die Größe, welche $3uu+3uz+zz$

vorstellet, das ist, durch das dreyfache Quadrat des ersten Theiles, nebst dem dreyfachen Producte des ersten Theiles durch den andern, und dem Quadrate des andern Theiles. Wenn die Vermehrung geschehen ist, so zieht man das herauskommende Product von der vorgegebenen Größe, nachdem der erste Cubus, welcher das u^3 vorstellet, schon von ihr weggenommen worden, ab. Wenn nichts übrig bleibt, so ist man versichert, daß die Größe gerade der Cubus der zweytheiligen durch $u + z$ vorgestellten Größe gewesen ist. Wenn noch einige Glieder übrig bleiben, und man will wissen, ob die Größe etwan der Cubus von einer dreytheiligen Größe ist, so muß man, um das dritte Glied zu finden, sich der beyden schon aufgeschriebenen Glieder eben so bedienen, wie man sich des ersten Gliedes bediente, da man das zweyte suchte.

XIII.

Erstes Exempel.

Einige Exempel werden diese Methode erläutern. Es sey die Größe $8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$. Erstlich nehme ich die Cubicwurzel des ersten Gliedes $8y^6$, und schreibe diese Wurzel (man sehe das 1. Feld der beygefügten Tafel) $2y^2$ neben der vorgegebenen Größe. Hernach schreibe ich den Cubus von $2y^2$ mit dem Zeichen — unter die vorgegebene Größe, indem ich das Zeichen desselben verändere. Nachdem die Abziehung oder Reduction geschehen ist, so schreibe ich den Rest $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$ hin. Ueber $2y^2$ setze ich das dreyfache Quadrat davon, nämlich

$12y^4$,

$12y^4$, und ich theile das erste Glied $60y^4b^2$ durch dieses dreyfache $12y^4$. Den aus dieser Theilung entstehenden Quotienten $5b^2$ schreibe ich neben $2y^2$. Zu $12y^4$ setze ich hernach $30b^2y^2$, das dreyfache Product von $2y^2$ durch die Größe $5b^2$, welche ich itzo aufgeschrieben habe, und zu diesen beyden ersten Gliedern setze ich $25b^4$, das Quadrat von $5b^2$.

Wenn dieses geschehen ist, so vermehre ich $5b^2$ durch diese drey Glieder, und schreibe ihre Producte mit entgegengesetzten Zeichen unter die Größe $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$, und da ich sehe, daß nach der Reduction nichts übrig bleibt, so schließe ich, daß die vorgegebene Größe ein vollkommener Cubus gewesen, und daß dessen Wurzel $2y^2 + 5b^2$ ist.

XIV.

Wir wollen nunmehr die Größe $x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$ vornehmen. Man sieht gleich bey dem ersten Anblicke, daß ihre Cubicwurzel mehr, als zwey Glieder, haben muß. Erstlich finde ich eben so leicht, (siehe das 2. Feld der beygefügten Tafel) als in dem vorhergehenden Exempel, die beyden Glieder $x^2 + 2bx$: aber da in jenem nichts übrig blieb, so bleibt hier $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$. Ich theile also das erste Glied $9b^2x^4$ dieses Restes durch $3x^4$, als das dreyfache Quadrat von x^2, weil dieses Glied $3x^4$ das erste Glied des dreyfachen Quadrates der Größe $xx + 2bx$ ist, welche itzo den ersten Theil (der im XI. §. *u* Zweytes Exempel.

hieß) der gesuchten Cubicwurzel vorstellet. Nachdem ich $9b^2x^4$ durch $3x^4$ getheilet habe, so schreibe ich den Quotienten $3b^2$ neben $xx + 2bx$. Hernach formire ich die Größe $3x^4 + 12bx^3 + 21b^2x^2 + 18b^3x + 9b^4$, indem ich das dreyfache Quadrat von $xx + 2bx$, das dreyfache Product von $xx + 2bx$ durch $3b^2$, und das Quadrat von $3b^2$ zusammensetze. Wenn dieses geschehen ist, so vermehre ich diese Größe durch $3b^2$, und schreibe alle Glieder des Productes, mit Veränderung ihrer Zeichen, unter die Größe $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$; und da nach der Reduction nichts übrig bleibt, so schließe ich, daß $x^2 + 2bx + 3b^2$ die vollkommene Cubicwurzel der vorgegebenen Größe ist.

XVI.

Wir haben (im II. Theile, im XXIV. XXV. und XXVI. §.) gesehen, wie man mit den Wurzelgrößen vom zweyten Grade die Zusammensetzung, die Abziehung, die Vermehrung und die Theilung verrichtet. Da diese Verrichtungen bey den Wurzelgrößen von höhern Graden eben so nöthig sind, so wollen wir sehen, was bey diesen neuen Wurzelgrößen zu beobachten nöthig ist.

Zusammensetzungen und Abziehungen der Wurzelgrößen von jeglicher Art.

Was die Zusammensetzung und Abziehung anbelanget, so ist zu dem, was von eben diesen Verrichtungen, in Ansehung der Wurzelgrößen vom zweyten Grade, gesagt worden, nichts hinzu zu setzen. Denn man darf weiter nichts thun, als jede Wurzelgröße auf ihren einfachsten

Aus-

1. Feld.

$$\begin{array}{l|l} 8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6 & 12y^4 + 30y^2b^2 + 25b^4 \\ -8y^6 & 2y^2 + 5b^2 \\ \hline \quad 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6 & \\ \quad -60y^4b^2 - 150b^4y^2 - 125b^6 & \\ \hline \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 3x^4 + 12bx^3 + 21b^2x^2 + 18b^3x + 9b^4 \\ & 3x^4 + 6bx^3 + 4b^2x^2 \\ x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 & x^2 + 2bx + 3b^2 \\ -x^6 & \\ \hline \quad 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 & \\ \quad -6bx^5 - 12b^2x^4 - 8b^3x^3 & \\ \hline \qquad 9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6 & \\ \qquad -9b^2x^4 - 36b^3x^3 - 63b^4x^2 - 54b^5x - 27b^6 & \\ \hline \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

2. Feld.

3. Feld.

$$\frac{a^2b^{-3}}{ca^{-1}} = a^3b^{-3}c^{-1} = \frac{a^3}{b^3c}$$

$$\sqrt{\frac{a^{-2}b^2}{ab^{-1}}} = \sqrt{a^{-3}b^3} = \sqrt{\frac{b^3}{a^3}} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b^{-3}}}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}}a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b\sqrt{b}\sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}c^5 \times \sqrt[4]{ac^3}}}{\sqrt{\frac{abb}{c}}} = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}-1}c^{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{12}}b^{-\frac{4}{3}}c^{\frac{35}{12}}$$

$$= \frac{a^{\frac{5}{12}}c^{\frac{35}{12}}}{b^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt[12]{a^5c^{35}}}{\sqrt[3]{b^4}} = \frac{c^2\sqrt[12]{a^5c^{11}}}{b\sqrt[3]{b}}$$

$= \sqrt[5]{\frac{243 a^5 b^9}{4}} = 3ab\sqrt[5]{\frac{b^4}{4}}$.

Ferner $\sqrt[3]{a^2 b^2 + b^4}$ durch $\sqrt[3]{\frac{a^2 - b^2}{8b}}$ getheilt, giebt zum Quotienten $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^3 + 8b^5}{a^2 - b^2}}$ $= 2b\sqrt[3]{\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$; und

$\frac{\sqrt[3]{a^2x^3 - x^5}}{\sqrt[3]{ab^4 + b^4x}} = \frac{x}{b}\sqrt[3]{\frac{a - x}{b}}$.

XVII.

Um dieses mit Wurzelgrößen von verschiedenen Exponenten zu verrichten, muß man sie auf einerley Exponenten bringen.

Wenn man aber eben diese Verrichtungen mit Wurzelgrößen von unterschiedenen Zeichen vornehmen, und sich an den bloßen Zeichen der Vermehrung nicht begnügen will, so muß man diese Wurzelgrößen in andere verwandeln, derer Wurzelzeichen einen größern Exponenten habe, welcher bey beyden zu vermehrenden oder zu theilenden Größen einerley seyn muß.

Methode dieser Reduction.

Wenn man z. E. $\sqrt[3]{ab}$ und $\sqrt[5]{abb}$ auf einerley Zeichen bringen soll, so erhöhe ich ab auf die Potenz 5, und schreibe $\sqrt[15]{}$, anstatt $\sqrt[3]{}$; wodurch ich die Größe $\sqrt[15]{a^5b^5}$ bekomme, welche mit $\sqrt[3]{ab}$ einerley ist. Desgleichen erhöhe ich ab^2 auf die dritte Potenz, und schreibe $\sqrt[15]{}$ anstatt $\sqrt[5]{}$, wodurch die Größe $\sqrt[5]{ab^2}$ in $\sqrt[15]{a^3b^6}$ ver-

verwandelt wird. Wenn ich also $\sqrt[3]{ab}$ durch $\sqrt[5]{abb}$ hätte vermehren sollen, so wäre $\sqrt[15]{a^8 b^{11}}$ zum Producte davon herausgekommen; und wenn ich die erste Größe durch die andere hätte theilen sollen, so hätte ich $\sqrt[15]{\frac{a^5 b^5}{a^3 b^6}} = \sqrt[15]{\frac{a^2}{b}}$ zum Quotienten bekommen.

Eben so würde das Product von $\sqrt[3]{a^2 b^4}$ durch $\sqrt{a^4 b^5}$ gewesen seyn $\sqrt[6]{a^{16} b^{23}} = a^2 b^3 \sqrt[6]{a^4 b^5}$.

Ueberhaupt, wenn man zwo Wurzelgrößen $\sqrt[m]{a^p b^q}$ und $\sqrt[n]{a^r b^s}$ auf einerley Zeichen bringen will, so verwandelt man die erste in $\sqrt[mn]{a^{pn} b^{qn}}$, und die andere in $\sqrt[mn]{a^{rm} b^{sm}}$. Wenn man sie hernach vermehren soll, so wird ihr Product $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{qn+sm}}$, und wenn man die erste durch die andere theilen sollte, so würde der Quotient seyn $\sqrt[mn]{a^{pn-rm} b^{qn-sm}}$.

Wenn die Exponenten zwoer Wurzelgrößen Zahlen sind, welche einen gemeinen Theiler haben, so sieht man, daß es nicht nöthig ist, jedes Wurzelzeichen in ein anderes zu verwandeln, dessen Exponent das Product der beyden ersten Exponenten ist. Z. E. wenn man $\sqrt{ab}$ und

$\sqrt[4]{ab^3}$

$\sqrt[4]{a b^3}$ hat, so verwandelt man das erste in $\sqrt[4]{a^2 b^2}$. Ferner, wenn man $\sqrt[4]{a^3 b}$ und $\sqrt[6]{a^5 b}$ hat, so verwandelt man das erste in $\sqrt[12]{a^9 b^3}$, und das andere in $\sqrt[12]{a^{10} b^2}$.

XVIII.

Wie man die vorhergehenden Operationen auf eine andere Art verrichtet.

Man kann noch eine andere Methode, die vorhergehenden Operationen zu verrichten, finden, wenn man eine Betrachtung über die Natur der Wurzelgrößen anstellet, welche ganz natürlich aus dem fliesset, was im VIII. §. von der Ausziehung aller Arten von Wurzeln gesagt worden. Diese Betrachtung bestehet darinne, daß die Wurzelgrößen als Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, können angesehen werden.

Um zu zeigen, nicht nur, wie man auf diese Betrachtung gekommen, sondern auch, wie man sich derselben bedienet hat, wollen wir, vermittelst dessen, was wir im Vorhergehenden gesehen haben, untersuchen, was die in dem vorhergehenden Exempel gebrauchten Größen $\sqrt[m]{a^p b^q}$ und $\sqrt[n]{a^r b^s}$ seyn können.

Wenn man die Zahlen hätte, welche die Exponenten p und q ausdrücken, so würde man sie, zufolge dem, was im VIII. §. gesagt worden, durch die durch m ausgedrückte Zahl theilen, und sich der Quotienten zu Exponenten von a und b bedienen, und dieses würde die erste durch

$\sqrt[m]{a^p b^q}$

$\sqrt[m]{a^p b^q}$ ausgedrückte Größe seyn. Aber ohne die besondern Werthe von p, q, m zu wissen, so ist klar, daß man hier, wie allemal, überhaupt $\frac{p}{m}$ und $\frac{q}{m}$ für die Quotienten der Theilung von p und von q durch m, das ist, für die Exponenten von a und von b in der Wurzel m von $a^p b^q$, schreiben kann. Folglich ist $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ diese Wurzel. Eben so wird $\sqrt[n]{a^r b^s}$ seyn $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$. Um nun die beyden Größen $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$ und $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$, in welche die Größen, die im XVII. §. durch einander vermehret werden sollten, verwandelt worden, durch einander zu vermehren, so muß man, wie bey allen Vermehrungen unverwickelter Größen, die zu einerley Buchstaben gehörenden Exponenten zusammensetzen, das ist, man muß $\frac{p}{m}$ mit $\frac{r}{n}$ und $\frac{s}{n}$ mit $\frac{q}{m}$ zusammensetzen, welches giebt

$$a^{\frac{p}{m}+\frac{r}{n}}\ b^{\frac{s}{n}+\frac{q}{m}}, \text{ oder } \ldots\ldots\ldots$$

$$a^{\frac{pn+rm}{mn}}\ b^{\frac{sm+qn}{mn}},$$

indem man die Brüche $\frac{p}{m}$ und $\frac{r}{n}$, und die Brüche $\frac{s}{n}$ und $\frac{q}{m}$, auf einerley Nenner bringt.

Also

Also ist $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, das ist, das Product von a, auf die Potenz $\frac{pn+rm}{mn}$ erhoben, durch b, auf die Potenz $\frac{sm+qn}{mn}$ erhoben, das Product der vorgegebenen Größen.

Man kann nunmehr leicht sehen, daß der Ausdruck $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{sm+qn}{mn}}$ und der Ausdruck $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{sm+qn}}$, welcher in diesem XVIII. §. gefunden worden, einerley sind. Denn aus eben der Ursache, aus welcher man gesehen hat, daß $\sqrt[m]{a^p}$ und $a^{\frac{p}{m}}$ einerley Größe bezeichneten, sieht man auch, daß $a^{\frac{pn+rm}{mn}}$ und $\sqrt[nm]{a^{pn+rm}}$, desgleichen auch $\sqrt[mn]{b^{sm+qn}}$ und $b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, einerley sind.

Hätte man aber die erste Größe $\sqrt[m]{a^p b^q}$ durch die andere $\sqrt[n]{a^r b^s}$ theilen wollen, so hätte man den Exponenten $\frac{r}{n}$ von $\frac{p}{m}$, und den Exponenten $\frac{s}{n}$ von $\frac{q}{m}$ abziehen müssen, wodurch

man a^{m}

man $a^{\frac{p}{m}-\frac{r}{n}} b^{\frac{q}{m}-\frac{s}{n}}$ oder $a^{\frac{pn-rm}{mn}} b^{\frac{qn-ms}{mn}}$ zum Quotienten bekommen hätte.

Um sich diese Verwandelung der Wurzelgrößen in Bruchpotenzen geläufig zu machen, wollen wir noch ein Exempel davon sehen. Man soll z. E. $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ durch $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$ theilen. Erstlich verwandelt man die erste Größe in $a^{\frac{m}{2p}} b^{\frac{3n}{2p}} c^{\frac{1}{p}}$, und die andere in $a^{\frac{2m}{p}} b^{\frac{n}{p}} c^{\frac{1}{p}}$. Hernach zieht man die Exponenten $\frac{2m}{p}, \frac{n}{p}, \frac{1}{p}$, welche die Buchstaben a, b, c, in der zweyten Größe haben, von den Exponenten $\frac{m}{2p}, \frac{3n}{2p}, \frac{1}{p}$, welche eben diese Buchstaben in der ersten Größe haben, ab, und die Reste $-\frac{3m}{2p}, \frac{n}{2p}, 0$, sind die Exponenten, welche man eben diesen Buchstaben in dem Quotienten geben muß; das ist, $a^{-\frac{3m}{2p}} b^{\frac{n}{2p}} c^{0}$ ist der Quotient.

Wenn man eine solche Größe findet, so ist es natürlich, daß es einige Schwierigkeit setzen wird, zu wissen, was sie bedeutet. Denn da noch kein Exponent, welcher Null oder negativ gewesen wäre, vorgekommen ist, so weis man nicht, was die Größen bedeuten, derer Exponenten sie sind.

Damit wir uns nun aus dieser Verwirrung herausziehen, so wollen wir die Frage wieder

von da an vornehmen, wo sich die Schwierigkeit zuerst zeigt, nämlich von da, wo man die Exponenten $\frac{2m}{p}$ von $\frac{m}{2p}$ und $\frac{1}{p}$ von $\frac{1}{p}$ abziehet, um $a^{\frac{m}{2p}}$ durch $a^{\frac{2m}{p}}$ und $c^{\frac{1}{p}}$ durch $c^{\frac{1}{p}}$ zu theilen.

Man setzet also c^0 anstatt $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$, und $a^{-\frac{3m}{2p}}$ anstatt $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$. Aber anstatt $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ kann man setzen $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, weil $a^{\frac{2m}{p}}$ das Product von $a^{\frac{3m}{2p}}$ durch $a^{\frac{m}{2p}}$ ist, und anstatt $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ kann man schreiben 1.

Also drücken die beyden zu untersuchenden Größen, $a^{-\frac{3m}{2p}}$ und c^0, die erste $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, und die andere 1 aus. Und also ist der gesuchte Quotient von $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ durch $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$ getheilt

theilt $= \frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$ oder $\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{a^{\frac{3m}{2p}}}$.

XIX.

Die Neuheit der in dem vorhergehenden §. gebrauchten Ausdrückungen, und die Allgemeinheit, welche sie in die Auflösungskunst bringen, verdienen, daß man sie nochmals kürzlich überlege, und sie auf allgemeine Grundregeln bringe.

Was eine Bruchpotenz ist,

1) Wenn eine Größe einen Bruch zum Exponenten hat, so kann man sie in die Wurzel einer Größe verwandeln, deren Exponent eine ganze Zahl ist, indem man den Nenner des vorgegebenen Exponenten zum Exponenten der Wurzel, und den Zähler eben dieses gebrochenen Exponenten zum Exponenten der Größe unter dem Wurzelzeichen machet; das ist, wenn man es algebraisch ausdrückt, es ist überhaupt

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Was eine negative Potenz ist.

2) Wenn eine Größe einen negativen Exponenten hat, so kann man sie in einen Bruch verwandeln, dessen Zähler Eins, und dessen Nenner eben dieselbe Größe mit eben dem vorgegebenen Exponenten, aber mit dem Zeichen +, ist; das ist, es ist überhaupt $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Was die Potenz o ist.

3) Eine jede Größe, deren Exponent Null ist, wird Eins, das ist, es ist $a^0 = 1$.

Der Beweis dieser drey in ihrer größten Allgemeinheit genommenen Sätze erfordert keine andern Schlüsse, als die, welche in dem vorhergehenden Paragraphe sind gemacht worden. Damit man sich aber dieser Sätze desto leichter erinnern möge, und damit man sich ihrer desto zuversichtlicher bedienen könne, so ist es gut, sie ins besondere zu betrachten; welches auf folgende Art leicht geschehen wird.

1) Man beweiset, daß $a^{\frac{n}{m}}$ die Wurzel m von a^n ist, wenn man zeigt, daß, wenn man $a^{\frac{n}{m}}$ auf die Potenz m erhöhet, a^n herauskömmt. Wenn man nun aber $a^{\frac{n}{m}}$ auf die Potenz m erhöhen will, so ist klar, daß man den Exponenten dieser Größe durch m vermehren muß, welches $a^{\frac{n}{m}\times m}$ oder a^n giebt.

2) a^{-m} muß nothwendig $\frac{1}{a^m}$ gleich seyn, wenn, indem man diese beyden Größen durch einerley Potenz von a vermehret, einerley Product herauskömmt. Wenn man nun aber jegliche Größe durch eine Potenz von a, deren Grad höher, als m ist, z. E. durch a^{2m}, vermehret,

mehret, so bekömmt man $a^{2m} \times a^{-m}$ oder a^{2m-m} oder a^{m} zum Producte von a^{2m} durch a^{-m}; desgleichen bekömmt man $\frac{a^{2m} \times 1}{a^m}$ oder a^{m} zum Producte von a^{2m} durch $\frac{1}{a^m}$; folglich sind a^{-m} und $\frac{1}{a^m}$ einander gleich.

3) Aus eben dieser Ursache sind a^0 und 1 einander gleich, weil, wenn man beydes durch a vermehret, $a^{0+1} = 1a$, oder $a = a$ herauskömmt.

Da durch Hülfe dieser einzigen drey Sätze alle Reductionen und alle Verwandelungen, welche von eben der Art, wie die vorhergehenden, sind, auch unzählige andere Operationen können gemacht werden, so werden sich die Anfänger in den Anwendungen derselben nicht zu viel üben können. Um ihnen hierzu behülflich zu seyn, so habe ich verschiedene Exempel davon in dem dritten Felde der beygefügten Tafel gegeben.

XX.

Nachdem man alle Schwierigkeiten, welche etwan bey den Gleichungen von zwey Gliedern vorfallen, gehoben, so ist es natürlich, daß man auch gesuchet hat, alle Gleichungen, welche nur drey Glieder haben, auf eine allgemeine Art aufzulösen: aber es fehlet noch viel, daß man eine

allgemeine Methode für alle Gleichungen von dieser Art gefunden haben sollte. Man hat sich begnüget, sie in einigen besondern Fällen aufzulösen. Man hat z. E. eine ziemlich weitläuftige Classe von Gleichungen gefunden, die man leicht auf die beyden Fälle bringen konnte, welche wir schon gesehen haben; nämlich auf den Fall der Gleichungen vom zweyten Grade, und der Gleichungen mit zwey Gliedern von einem jeglichen Grade.

Von den Gleichungen mit drey Gliedern, welche nach der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade aufgelöset werden.

Diese Gleichungen sind alle diejenigen, welche man unter diese allgemeine Formel $x^{2m} + ax^{m} = b$ bringen kann. Um dieselben aufzulösen, muß man, wie in den Gleichungen vom zweyten Grade, das, was in der ersten Hälfte fehlet, dazu setzen, um ein Quadrat daraus zu machen. Dieses giebt alsdenn $x^{2m} + ax^{m} + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$; wovon die Wurzel ist, $x^{m} + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, und folglich $x^{m} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, welches nur eine Gleichung von zwey Gliedern ist, und für den Werth von x giebt . . . . . $\sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$, wodurch man alle Gleichungen von drey Gliedern auflösen kann, wenn das erste Glied eine Potenz von x hat, welche das Doppelte von der Potenz im zweyten Gliede ist, das dritte Glied aber eine bekannte Größe ist. Man sieht aus der Natur dieser

25 b^4 1. Feld.

$x^4+12bx^3+21b^2x^2+18b^3x+9b^4$
$x^4+6bx^3+4b^2x^2$
${}^2+2bx+3b^2$

2. Feld.

b^6
b^6

$a^2 b$ 3. Feld.

dieser Ausdrückung, und aus dem, was von den Wurzeln der Gleichungen bekannt ist, daß alle in der allgemeinen Formul $x^{2m} + ax^{m} = b$ enthaltene Gleichungen nicht mehr als vier wirkliche Wurzeln haben können, und daß sie, wenn m eine ungerade Zahl ist, ihrer nur zwo haben.

XXI.

Exempel der vorhergehenden Methode.

Damit wir von dieser Methode eine Anwendung machen, wollen wir erstlich setzen, man hätte die Gleichung $x^4 - bbxx = bbcc$. Wenn man auf beyden Seiten $\frac{1}{4}b^4$, das Quadrat der Hälfte des Coefficienten von xx, hinzusetzet, so bekömmt man $x^4 - bbxx + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}b^4 + bbcc$, wovon die Quadratwurzel ist $xx - \frac{1}{2}bb = \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$. Hieraus bekömmt man $xx = \frac{1}{2}bb \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$, und folglich $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, welches zween wirkliche und zween unmögliche Werthe in sich hält. Die beyden erstern sind $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, und die beyden letztern $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb - b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, welche nothwendig unmöglich seyn müssen, weil $b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ größer ist, als $\frac{1}{2}bb$.

XXII.

Ein ander Exempel.

Es sey itzo die Gleichung $x^6 - 2a^2bx^3 = a^6$. Wenn man auf beyden Seiten a^4bb dazu setzet, so kömmt $x^6 - 2aabx^3 + a^4b^2 = a^4bb + a^6$ heraus, wovon die Quadratwur-

zel ist $x^3 - aab = a^2\sqrt{aa+bb}$, oder . . . $x^3 = aab \pm a^2\sqrt{aa+bb}$. Dieses giebt endlich $x = \sqrt[3]{aab \pm a^2\sqrt{a^2+b^2}}$, welches zween wirkliche Werthe haben wird, einen positiven und einen negativen. Die vier übrigen Wurzeln eben dieser Gleichung, welche man leicht finden würde, wenn man so, wie in dem III. §. verführe, würden unmöglich seyn.

XXIII.

Drittes Exempel. Es sey nunmehr $x^4 - \overline{aa+bb}\times xx = -aabb$. Wenn man auf beyden Seiten $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$ dazu setzet, so bekömmt man $x^4 - \overline{aa+bb}\times xx + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, wovon die zweyte Hälfte eben so wohl ein Quadrat ist, als die erste. Wenn man hernach die Quadratwurzel auf beyden Seiten nimmt, so bekömmt man $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = \pm\frac{1}{2}aa \mp \frac{1}{2}bb$, welches $xx = aa$ und $xx = bb$ giebt, das ist, $x = \pm a$ und $x = \pm b$; und dieses sind die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 - \overline{aa+bb}\times xx = -aabb$. Man würde diese Wurzeln auch nach der im dritten Theile vorgetragenen Methode gefunden haben, indem man die commensurablen Theiler gesuchet hätte.

XXIV.

Viertes Exempel. Nun wollen wir noch die Gleichung $x^4 - \overline{2gh + 4ff}\times xx = -gghh$ vornehmen. Wenn man das Quadrat der Hälfte des Coefficien-

ficienten des zweyten Gliedes hinzusetzet, und hernach die Quadratwurzel nimmt, so bekömmt man $x^2 - gh - 2ff = \pm 2f\sqrt{gh+ff}$, welches giebt $x = \pm\sqrt{gh+2ff \pm 2f\sqrt{gh+ff}}$. Wenn man aber diese Größe etwas genau betrachtet, so wird man bald gewahr, daß das, was unter dem Wurzelzeichen steht, ein Quadrat ist, nämlich das Quadrat von $f \pm \sqrt{ff+gh}$. Denn man sieht in dem Gliede $2f\sqrt{gh+ff}$ das doppelte Product von f und $\sqrt{gh+ff}$, und in der Größe $gh+2ff$ sieht man das Quadrat von f, und das Quadrat $ff+gh$ des Wurzeltheiles.

Also wird der vorhergehende Werth von x, wenn man voraussetzet, daß man das Zeichen + für das erste Wurzelzeichen gewählet habe, zu $f \pm \sqrt{ff+gh}$, und wenn man voraussetzet, daß das Zeichen — des ersten Wurzelzeichens gelten soll, so wird er $-f \mp \sqrt{ff+gh}$. Dieses sind die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 - 2ghxx - 4ffxx = -gghh$.

Wer einige Fertigkeit im Rechnen besitzet, der konnte bey diesem Exempel leicht muthmaaßen, daß die Größe $gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh+ff}$ eine Quadratwurzel habe: aber es können viel Fälle vorkommen, da die auf eben diese Art gefundenen Größen auch Quadrate sind, ohne daß man es vermuthet. Es ist also nöthig, eine allgemeine Methode zu suchen, wodurch man se-

hen möge, welche Größen von dieser Art sind, und ihre Wurzeln finden könne.

XXV.

Methode, die Quadratwurzeln der Größen, welche zum Theil commensurabel, zum Theil Wurzelgrößen sind, zu finden.

Um hierzu zu gelangen, merke ich erstlich an, daß die Wurzel einer aus zwey Theilen zusammengesetzten Größe, wovon der eine Theil commensurabel, und der andere eine Wurzelgröße vom zweyten Grade ist, selbst aus zwey Theilen bestehen muß, und daß wenigstens einer von den beyden Theilen eine Wurzelgröße seyn muß.

Dieses vorausgesetzt, drücke ich überhaupt die vorgegebene Größe durch $A + B$ aus. A bezeichnet den rationalen Theil, und B eine jede Wurzelgröße vom zweyten Grade. Hernach drücke ich durch $p + q$ die gesuchte Wurzel aus.

Nun überlege ich, daß, es mag p, oder q, die Wurzelgröße seyn, oder sie mögen es alle beyde seyn, das Quadrat $p^2 + 2pq + q^2$ sonst in keinem Gliede, als in $2pq$, Wurzelgrößen haben kann. Wenn ich also dieses Quadrat mit der gegebenen Größe vergleiche, so stellt $2pq$ das B und $p^2 + q^2$ das A vor; das ist, wenn man es algebraisch ausdrückt, man bekömmt zu Bestimmung des p und q die beyden Gleichungen $p^2 + q^2 = A$, $2pq = B$.

Aus der letzten bekömmt man $p = \frac{B}{2q}$. Wenn man dieses in der erstern an die gehörige Stelle setzt, so giebt es $\frac{B^2}{4q^2} + q^2 = A$ oder $q^4 - Aq^2 = -\frac{B^2}{4}$ oder $q^2 - \frac{1}{2}A = \pm\frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}$, und folglich $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$. Wenn man her-

hernach diesen Werth von q in der Gleichung $p^2+q^2=A$, oder $p=\pm\sqrt{A-q^2}$ an seine Stelle setzet, so bekömmt man . . . .

$$p=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}A\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}.$$

Die gesuchte Wurzel der Größe $A+B$ ist also . . . . . .

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}A\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}},$$

oder bloß . . . .

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}.$$

Denn es ist klar, daß dieser Ausdruck mit dem Ausdrucke . . . .

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}},$$

welchen man bekommen würde, wenn man zum Zeichen des $\sqrt{A^2-B^2}$ das $-$ nähme, vollkommen einerley ist.

Was die Zeichen anbelanget, welche den beyden Theilen . . . .

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} \text{ und } \sqrt{\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$$

der gesuchten Wurzel von $A+B$ zukommen, so müssen sie einerley seyn, wenn die Wurzelgröße B positiv ist, und sie müssen unterschieden seyn, wenn B negativ ist. Denn man kann leicht sehen, daß überhaupt, wenn $p+q$ oder $-p-q$ die Wurzel von $A+B=pp+qq+2pq$ ist, $p-q$ oder $-p+q$ die Wurzel von $A-B=pp+qq-2pq$ ist.

XXVI.

Bey diesem itzt gefundenen Werthe für die Wurzel der Größe $A+B$ könnte man befürchten, eine eben so große Schwierigkeit anzutreffen,

als

als diejenige ist, welche man anfänglich heben wollte. Denn ....

$\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ scheinen bey dem ersten Anblicke Wurzeln von solchen Größen zu bezeichnen, welche zum Theile rational und zum Theile irrational sind; und wenn dieses wäre, so wäre die Schwierigkeit noch eben dieselbe. Es muß also, damit die Methode von einigem Nutzen sey, die Größe A^2-B^2, welche unter dem Wurzelzeichen steht, ein commensurables Quadrat seyn. Nun muß aber dieses nothwendig allemal in dem Falle zutreffen, wenn $A+B$ eine Wurzel hat. Um sich davon zu versichern, ist es genug, sich (aus dem XXV. §.) zu erinnern, daß $p-q$ nothwendig $\sqrt{A-B}$ ist, woferne $p+q=\sqrt{A+B}$. Denn man sieht sogleich daraus, daß $\sqrt{A-B}\times\sqrt{A+B}$ oder $\sqrt{AA-BB}$ so viel ist, als $\overline{p-q}\times\overline{p+q}$ oder $pp-qq$, und also eine commensurable Größe ist.

XXVII.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel.

Um die Anwendung der vorhergehenden Methode zu zeigen, wollen wir z. E. die Größe $aa+2c\sqrt{aa-cc}$ vornehmen. Wenn man sie mit $A+B$ vergleicht, so bekömmt man $a^2=A$, und $B=2c\sqrt{aa-cc}$, und folglich $\sqrt{A^2-B^2}=aa-2cc$; woraus man bekömmt $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=\sqrt{aa-cc}$, wie auch $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=c$, das ist,

die

die gesuchte Wurzel ist $c + \sqrt{aa - cc}$, oder $-c - \sqrt{aa - cc}$.

XXVIII.

Wenn man aus $16 + 6\sqrt{7}$ die Quadratwurzel ausziehen sollte, so bekäme man, wenn man $A = 16$ und $B = 6\sqrt{7}$ machte, $\sqrt{AA - BB} = 2$, und folglich würde $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}}$ seyn 3, und $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}}$ würde $\sqrt{7}$ seyn. Also würde $3 + \sqrt{7}$ oder $-3 - \sqrt{7}$ die gesuchte Wurzel seyn.

Ein ander Exempel.

XXIX.

Es sey itzo die Größe $ap - 2a\sqrt{ap - aa}$. Wenn man $A = ap$, und $B = -2a\sqrt{ap - aa}$, macht, so bekömmt man $\sqrt{AA - BB} = ap - 2aa$, und $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} = \sqrt{ap - aa}$, wie auch $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = a$; das ist, die gesuchte Wurzel wird seyn $\sqrt{ap - aa} - a$, oder $a - \sqrt{ap - aa}$.

Drittes Exempel.

XXX.

Wenn die vorgegebene Größe ist $b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 + 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$, so bekömmt man $A = b^2 - ab + \frac{1}{4}aa$, $B = 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$ und $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{b^4 - 6ab^3 + \frac{19}{2}a^2b^2 - \frac{3}{2}a^3b + \frac{1}{16}a^4} = bb - 3ab + \frac{1}{4}aa$. Dieses giebt . . . $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$ und $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{ab}$. Also ist die

Viertes Exempel.

die gesuchte Wurzel $\sqrt{ab} + \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$, oder $-\sqrt{ab} - \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$. Dieses Exempel zeiget deutlicher, als die vorhergehenden, wie nöthig es ist, zu wissen, wie man die Wurzel aus Größen ausziehen muß, welche zum Theile rational und zum Theile irrational sind. Denn da in den vorhergehenden Fällen die gesuchte Wurzel nur ein Wurzelzeichen hatte, so konnte sie aus einer Gleichung vom zweyten Grade gefunden werden, welche in derjenigen Gleichung würde enthalten gewesen seyn, zu deren Auflösung man nöthig gehabt hätte, dieselbe Wurzel zu suchen. Hingegen da in diesem letztern Falle der Werth der gesuchten Wurzel zwey Wurzelzeichen hat, so hat sie unmöglich aus irgend einer Gleichung vom zweyten Grade herrühren können. Und in der That, da wir (im XXVII. §.) die Wurzel von $aa + 2c\sqrt{aa - cc}$ haben suchen sollen, so ist dieses eben so viel gewesen, als wenn man die Gleichung $x^4 - 2aaxx - 4aacc + 4c^4 + a^4 = 0$ hätte auflösen sollen, aus welcher man, nach dem, was im XXXVI. §. des III. Theiles gesagt worden, die Gleichungen $xx - 2cx + 2cc - aa = 0$ und $xx + 2cx + 2cc - aa = 0$ ziehen konnte; da hingegen die Quadratwurzel von $b^2 - ab + \frac{1}{4}aa + 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$ zur Auflösung von $x^4 + 2 \times \overline{ab - bb - \frac{1}{4}aa} \times x^2 + \frac{19}{2}a^2b^2 - 6ab^3 - \frac{3}{2}a^3b + b^4 + \frac{1}{16}a^4 = 0$, hat dienen sollen, welche Gleichung

chung sich nicht in zwo Gleichungen vom zweyten Grade zerfällen läßt.

XXXI.

Nachdem man gelernet, wie man unter denen Größen, welche zum Theile rational, zum Theile irrational sind, diejenigen unterscheiden kann, welche Quadrate sind, so hat man sich bemühen müssen, auch diejenigen zu unterscheiden, welche Cubicgrößen, oder andere höhere Potenzen sind, weil dieses nöthig war, um alles dasjenige vollständig zu haben, was die Gleichungen betrifft, die unter der Form $x^{2m} + ax^{m} = b$ oder $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$ begriffen sind. Wir wollen erstlich sehen, was man in dem Falle thun könnte, da $m = 3$ ist, das ist, wenn man die Cubicwurzel einer jeden Größe $A + B$ finden sollte, in welcher A rational, und B eine Wurzelgröße vom zweyten Grade ist.

Methode, die Cubicwurzel derer Größen zu finden, welche zum Theil commensurabel und zum Theil incommensurabel sind.

Erstlich wollen wir anmerken, daß die Cubicwurzel einer Größe von dieser Art nicht mehr als eine Wurzelgröße vom zweyten Grade in sich haben kann. Denn man sieht wohl, daß der Cubus von einer Größe, welche zwo solche Wurzelgrößen enthielte, z. E. von $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, zum wenigsten zwo Wurzelgrößen geben müßte.

Hernach bemerken wir, daß eben diese gesuchte Cubicwurzel keine andere Art von Wurzelgrößen in sich halten kann, es müßte denn eine cubische Wurzelgröße, und dieselbe beyden Theilen der Wurzel gemein seyn,

wie

wie z. E. die Größe $f\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m}\times\sqrt{g}$, wovon der Cubus $mf^3+3mfg+\overline{3mff+mg}\times\sqrt{g}$ so, wie die angenommene Größe $A+B$, einen commensurablen Theil, und einen Wurzeltheil vom zweyten Grade hat.

Dieses vorausgesetzet, wollen wir die gesuchte Wurzel durch $p+q$ ausdrücken, worinne q denjenigen Theil vorstellen soll, in welchem die Wurzelgröße vom zweyten Grade ist; es mag übrigens auch entweder in p und q zugleich, oder in keinem von beyden, eine cubische Wurzelgröße vorkommen.

Es ist klar, daß der Cubus $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$ keine andere Wurzelgröße enthalten wird, als die Wurzelgröße vom zweyten Grade, welche in q ist, und daß diese Wurzelgröße nur in den Gliedern $3ppq$ und q^3 seyn wird. Man muß also diese beyden Glieder mit der gegebenen Größe B, und die beyden andern mit A vergleichen; welches die Gleichungen $A=p^3+3pq^2$, und $B=3p^2q+q^3$ giebt.

Diese beyden Gleichungen aufzulösen, muß man erstlich eine von den beyden unbekannten Größen p oder q wegbringen; welches nach den im XXXIII. §. des zweyten Theiles festgesetzten Grundregeln leicht geschehen kann. Aber man kann die Rechnung abkürzen, wenn man eine Anmerkung zu Hülfe nimmt, welche ein wenig geübten Algebraisten leicht hat beyfallen müssen, und darinne besteht, daß $AA-BB$ allezeit der

Cubus

Cubus von $pp-qq$ ist, wenn $A+B$ der Cubus von $p+q$ ist. Denn da $p+q$ die Cubicwurzel von $p^3+3pq^2+3p^2q+q^3$ ist, wovon der erste Theil $p^3+3pq^2=A$, und der andere $3p^2q+q^3=B$ ist, so ist $p-q$ nothwendig die Cubicwurzel von $A-B$, welches alsdenn $p^3+3pq^2-3p^2q-q^3$ ist; und $pp-qq$ oder $\overline{p-q}\times\overline{p+q}$ ist also $\sqrt[3]{A+B}\times\sqrt[3]{A-B}$, das ist $\sqrt[3]{AA-BB}$. Dieses vorausgesetzet, bekömmt man also die Gleichung $\sqrt[3]{A^2-B^2}=p^2-q^2$, oder $n=p^2-q^2$, in welcher n gegeben ist, und nothwendig entweder eine commensurable, oder eine bloße cubische Wurzelgröße seyn muß.

Aus der Gleichung $n=p^2-q^2$, oder $q^2=p^2-n$, und aus der Gleichung $A=p^3+3pq^2$ bekömmt man sogleich $4p^3-3pn-A=0$, eine Gleichung, welche man auflösen muß, um den ersten Theil p der gesuchten Cubicwurzel zu bekommen. Sobald man diese aufgelöset hat, bekömmt man auch den andern Theil eben dieser gesuchten Cubicwurzel, wenn man sich der Gleichung $q=\sqrt{pp-n}$ bedienet.

Was das Wurzelzeichen anlanget, so ist es positiv, wenn die Wurzelgröße in der vorgegebenen Größe das Zeichen $+$ hat, und es ist negativ, wenn die Wurzelgröße in der vorgegebenen Größe das Zeichen $-$ hat. Denn man sieht leicht, daß der Wurzeltheil des Cubus von

$p+q$, welcher Theil $\overline{3pp+qq}\times q$ ist, allezeit eben das Zeichen haben muß, welches q hat.

Wenn die Wurzel der vorgegebenen Größe $A+B$ kein cubisches Wurzelzeichen in allen ihren Gliedern haben kann, so wird n oder $\sqrt[3]{A^2-B^2}$ eine commensurable Größe seyn, und folglich wird die Gleichung $4p^3-3pn-A=0$ keine Wurzelgrößen enthalten, und da p alsdenn commensurabel ist, so muß man es ohnfehlbar finden, wenn man alle Theiler dieser Gleichung, nach der im III. Theile im XXXII. §. gegebenen Methode, suchet.

Wenn beyde Theile der gesuchten Wurzel ein cubisches Wurzelzeichen in sich haben müssen; welches man daran erkennen kann, wenn man für A^2-B^2 keinen vollkommenen Cubus findet: so muß man sehen, welches diejenige Größe ist, durch welche man die vorgegebene Größe vermehren muß, um eine neue daraus zu bekommen, deren beyde Theile, wenn man dieselben für A und für B nähme, für $AA-BB$ einen vollkommenen Cubus gäben. Wenn man hernach die Cubicwurzel dieser neuen Größe, die man an die Stelle der vorgegebenen gesetzet, gefunden hätte, so dürfte man nur noch dieselbe durch die Cubicwurzel des Vermehrers, dessen man sich bedienet hätte, theilen, und so bekäme man die gesuchte Wurzel.

Man wird diesen Vermehrer leicht bestimmen können, wenn man anmerket, daß es eben so viel ist, als wenn man die Quadratgröße finden wollte,

wollte, durch welche man die anfänglich für $AA - BB$ gefundene Größe vermehren müßte, um daraus einen vollkommenen Cubus zu machen. Denn es ist klar, daß die Quadratwurzel dieses Vermehrers von $AA - BB$ der Vermehrer seyn würde, welchen man den vorgegebenen Größen A und B geben müßte.

XXXII.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel.

Um die Anwendung dieser Methode zu zeigen, wollen wir setzen, man suche die Cubicwurzel der Größe $7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab\sqrt{2aa - ab}$. Wenn ich diese Größe mit $A + B$ vergleiche, so bekomme ich $7a^3 - 3a^2b = A$; . . . . $5aa - ab\sqrt{2aa - ab} = B$; und folglich $A^2 - B^2 = -a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3$, und n, oder $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -aa + ab$. Wenn ich diesen Werth von n, wie auch den Werth von A, in der Gleichung $4p^3 - 3pn - A = 0$, an die gehörigen Stellen setze, so bekomme ich $4p^3 + 3paa - 3pab - 7a^3 + 3a^2b$, wozu man einen Theiler von einer Dimension suchen muß. Man wird, nach der im III. Theile im XXXII. §. gezeigten Methode, leicht finden, daß dieser Theiler $p - a$ ist; das ist, daß a der Werth von p ist. Wenn man diesen Werth von p in der Gleichung $q = \sqrt{pp - n}$ an die gehörige Stelle setzet, so kömmt $q = \sqrt{2aa - ab}$ heraus. Folglich ist die gesuchte Wurzel $a + \sqrt{2aa - ab}$.

XXXIII.

Ein ander Exempel.

Wir wollen nunmehr die Cubicwurzel von $2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}$ suchen. Erstlich mache ich $2aac - abc - bbc = A$, und $B = -\overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}$, welches mir giebt $A^2 - B^2 = 2b^4cc - 2ab^3cc$, welches kein Cubus ist. Um zu erfahren, wodurch es zum Cubus werden kann, zergliedere ich es in seine Factoren, da denn $2 \times cc \times \overline{b - a} \times b^3$ herauskömmt. Hieraus sehe ich leicht, daß, wenn ich es durch $\frac{4 \times \overline{b - a}^2}{cc}$, welches eine Quadratgröße ist, vermehre, ich einen vollkommenen Cubus bekomme, nämlich den Cubus von $2 \times \overline{b - a} \times b$, oder von $2bb - 2ab$. Folglich wenn man die vorgegebene Größe durch $\frac{2b - 2a}{c}$, als die Wurzel des Quadrats $\frac{4 \times \overline{b - a}^2}{cc}$ vermehret, so bekömmt man eine neue Größe $\overline{2aa - ab - bb} \times \overline{2b - 2a} - \overline{2a - b} \times \overline{2b - 2a}\sqrt{aa - bb}$. Da der erste Theil dieser Größe A, und der andere B vorstellet, so giebt sie für $\sqrt{AA - BB}$, das ist, für n, $2bb - 2ab$. Ich setze also voraus, man hätte mir wirklich diese Größen für A und für B gegeben, und ich hätte diesen Werth von n daraus gezogen. In diesem Falle würde die Gleichung $4p^3 - 3pn - A = 0$ geben $4p^3 - 3p \times \overline{2bb - 2ab} + \overline{bb + ab - 2aa} \times \overline{2b - 2a} = 0$, für welche man,

man, nach der im III. Theile im XXXII. §. angegebenen Methode, $p + a - b$ zum Theiler finden würde, das ist, der Werth von p würde alsdenn seyn $b - a$. Wenn man diesen in $q = \sqrt{pp - n}$ an die gehörige Stelle setzte, so bekäme man $q = \sqrt{aa - bb}$; folglich würde $b - a - \sqrt{aa - bb}$ die Cubicwurzel der neuen Größe, oder, welches einerley ist, des Productes der vorgegebenen Größe durch $\frac{2b - 2a}{c}$, seyn. Folglich ist $\frac{\overline{b - a - \sqrt{aa - bb}} \times \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{2b - 2a}}$ die gesuchte Cubicwurzel der vorgegebenen Größe.

In diesem Exempel, und in allen andern, wo die gesuchte Wurzel cubische Wurzelzeichen hat, ist es klar, daß man nicht, um der Anwendung der vorhergehenden Methode entübriget zu seyn, die im XXXVI. §. des III. Theiles gegebene Methode zu Hülfe nehmen kann, das ist, daß man keinen Theiler in der Gleichung finden kann, deren Auflösung für den Werth von x die gesuchte Cubicwurzel gegeben hätte Und man kann auch leicht sehen, daß die Gleichung $x^6 - 2x^3 \times \overline{2aac - abc - bbc} + 2b^4cc - 2ab^3cc$, welche . . . .
$x = \sqrt[3]{2aac - abc - bbc - 2\overline{a - b}\sqrt{aacc - bbcc}}$
gegeben haben würde, nicht zergliedert werden kann.

Aber in allen denen Fällen, da die gesuchte Wurzel bloß aus einem rationalen und aus ei-

nem irrationalen Gliede vom zweyten Grade bestehen muß, könnte man diese Wurzel allemal auch finden, indem man die Gleichung zerfällete, deren Auflösung Anlaß gegeben, die Cubicwurzel der vorgegebenen Größe zu suchen. Z. E. in dem XXXII. §. da man den Ausdruck

$$x = \sqrt[3]{7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab\sqrt{2aa - ab}}$$

entwickeln sollte, hätte man in der Gleichung $x^6 + \overline{6a^2b - 14a^3} \times x^3 - a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3 = 0$, aus welcher man diesen Werth von x bekommen hätte, eine Gleichung vom zweyten Grade $xx - 2ax + ab - aa = 0$, finden können, welche eben diesen Werth von x würde gegeben haben.

XXXIV.

Wenn die Glieder der Größe, deren Cubicwurzel man finden will, Nenner haben, so bringt man sie erstlich alle auf einerley Nenner, und theilet hernach die Cubicwurzel des Zählers durch die Cubicwurzel des Nenners.

XXXV.

Methode, die Cubicwurzeln der zum Theile commensurablen, zum Theile incommensurablen Zahlengrößen zu finden.

Wenn die vorgegebene zum Theil commensurable, zum Theil incommensurable Größe nur aus Zahlen besteht, so kann man ihre Cubicwurzel leichter finden, als nach der vorhergehenden Methode.

Denn wenn man erstlich setzet, daß die gesuchte Wurzel kein Cubicwurzelzeichen haben, sondern aus einer ganzen Zahl und aus einem einfachen und gleichfalls ganzen Wurzeltheile zusammengesetzet seyn soll, so wird man daraus, daß $p - q$

ist $\sqrt[3]{A-B}$, wenn $p+q$ ist $\sqrt[3]{A+B}$, oder, welches einerley ist, daraus, daß ....

$p=\frac{\sqrt[3]{A-B}+\sqrt[3]{A+B}}{2}$, eine ganz leichte Methode herleiten können, den commensurablen Theil der gesuchten Wurzel zu finden. Diesen zu finden, darf man nur in den allernächsten ganzen Zahlen die Größen $\sqrt[3]{A-B}$ und $\sqrt[3]{A+B}$ berechnen, und hernach die Hälfte dieser beyden Zahlen nehmen, um den vollkommenen Werth von p zu bekommen. Denn wenn man für $\sqrt[3]{A-B}$ und für $\sqrt[3]{A+B}$ diejenigen ganzen Zahlen nimmt, welche ihnen am nächsten sind, so wird der Fehler, den man bey jeglicher von diesen Größen begehen kann, noch nicht $\frac{1}{2}$ seyn, und folglich kann die ganze Zahl, welche man für $\frac{\sqrt[3]{A-B}+\sqrt[3]{A+B}}{2}$, das ist, für p, hieraus bekömmt, niemals um Eins von dem wahren Werthe von p unterschieden seyn; und da dieser wahre Werth von p eine ganze Zahl seyn muß, so wird er durch dieses Mittel vollkommen bestimmet seyn.

Da man also den Werth von p hat, und schon den Werth von n oder von $\sqrt[3]{AA-BB}$ weis, so muß man, wie in der vorhergehenden Methode, die Werthe von p und von n in $q=\sqrt[3]{pp-n}$ an die gehörigen Stellen setzen;

und so bekömmt man den zweyten Theil der gesuchten Cubicwurzel.

Wofern in der gesuchten Wurzel alle beyde Glieder einerley Cubicwurzelzeichen haben; welches man wahrnimmt, wenn man bemerket, daß $A^2 - B^2$ nicht ein vollkommener Cubus ist: so muß man, zufolge eben derselben Methode, welcher man sich bey den Buchstabengrößen bedienet hat, die Zahl suchen, durch welche man $A + B$ vermehren muß, damit $AA - BB$ ein vollkommener Cubus werde; und wenn man die Wurzel der neuen Größe, in welche $A + B$ durch diese Vermehrung verwandelt wird, gefunden hat, so darf man sie nur durch die Cubicwurzel derjenigen Zahl theilen, durch welche man $A+B$ vermehret hat; alsdenn wird der Quotient die gesuchte Wurzel seyn.

XXXVI.

Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel.

Die Anwendung dieser Methode zu zeigen, wollen wir die Cubicwurzel von $7 + 5\sqrt{2}$ suchen. Nachdem ich $A = 7$, $B = 5\sqrt{2}$ gemacht, so finde ich, daß n, oder $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -1$ ist. Hernach bemerke ich, daß der Werth von $\sqrt[3]{A + B}$ oder von $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ näher bey 2, als bey 3, ist. Ich drücke ihn also durch 2 aus. Gleichfalls bemerke ich, daß der Werth von $\sqrt[3]{A - B}$, oder von $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ zwischen 0 und 1 fällt, aber daß er näher bey 0 ist. Ich nehme also 0 für diese Größe an, und bekomme hier-

hierdurch p oder $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}=1$. Ich setze hernach diesen Werth von p in $q=\sqrt{pp-n}$ an seine Stelle, und bekomme $q=\sqrt{2}$. Hieraus schließe ich, daß, wenn die vorgegebene Größe $7+5\sqrt{2}$ eine Cubicwurzel hat, dieselbe $1+\sqrt{2}$ ist. Und es kömmt auch wirklich $7+5\sqrt{2}$ heraus, wenn man $1+\sqrt{2}$ cubiret.

XXXVII.

Ein ander Exempel.

Wir wollen itzo aus $5+3\sqrt{3}$ die Cubicwurzel ausziehen. Man wird finden $AA-BB=-2$. Da aber 2 kein vollkommener Cubus ist, so muß man die Zahl suchen, durch welche man $5+3\sqrt{3}$ hätte vermehren sollen, damit $AA-BB$ ein Cubus geworden wäre; oder, welches einerley ist, man muß die einfache Zahl suchen, welche, wenn man durch das Quadrat derselben $AA-BB$, das ist, 2, vermehret, einen Cubus giebt. Man sieht aber gleich, daß 2 selbst diese Zahl ist. Wir wollen also setzen, man hätte die Cubicwurzel von $10+6\sqrt{3}$ finden wollen. Man würde alsdenn bekommen haben $n=-2$, und $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$ oder $(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}})$: 2 würde, durch die nächste ganze Zahl ausgedrückt, 1 gewesen seyn. Ich setze also diese Werthe von p und von n in $q=\sqrt{pp-n}$ an ihre Stellen, und bekomme $q=\sqrt{3}$. Ich untersuche nunmehr, ob $p+q$ oder $1+\sqrt{3}$ die Cubicwurzel von

$10+6\sqrt{3}$ ist, und ich finde, daß sie es wirklich ist. Hieraus schließe ich, daß $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ die gesuchte Cubicwurzel von $5+3\sqrt{3}$ ist.

XXXVIII.

Wie man die vorhergehende Methode einfacher macht.

Man kann die Rechnung in der Näherung, durch welche man p bestimmet, leichter machen, wenn man bemerket, daß man anstatt . . . .
$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$ schreiben kann . . . .

$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$$

, weil n oder $\sqrt[3]{AA-BB} = \sqrt[3]{A-B}\times\sqrt[3]{A+B}$ ist. Dieser Ausdruck ist aber wirklich einfacher, als $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A+B}}{2}$, weil es leichter ist, die Zahl n, welche als schon gefunden vorausgesezet wird, durch $\sqrt[3]{A+B}$ zu theilen, als $\sqrt[3]{A-B}$ besonders zu berechnen.

XXXIX.

Anwendung dieser neuen Methode.

Den Gebrauch dieser neuen Formel zu zeigen, wollen wir sie auf das im XXXVI. §. vorgehabte Exempel anwenden, wo A war $=7$ und $B=5\sqrt{2}$. Nachdem ich, eben so, wie in gedachtem Paragraphe, gefunden habe, daß $n=-1$, und daß $\sqrt[3]{A+B}$, in den nächsten ganzen Zahlen ausgedrückt, 2 ist, so theile ich, anstatt,

anstatt, wie in jenem Paragraphe geschehen, die nächste Cubicwurzel von $7 - 5\sqrt{2}$ zu suchen, n oder -1 durch den Werth 2 von $\sqrt[3]{A+B}$, welches mir $-\frac{1}{2}$ giebt. Dieses setze ich in der vorhergehenden Formel . . . .

$$\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\frac{\sqrt[3]{A+B}}{2}}$$

an die gehörige Stelle, und bekomme $\frac{2-\frac{1}{2}}{2}$ oder 1 (indem ich die nächste ganze Zahl nehme) für den Werth von p, wie es in erwähntem Paragraphe durch die Formel $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$ gefunden worden. Mit dem übrigen verfährt man so, wie dort.

XL.

Diese neue Methode könnte in denen Fällen fehlerhaft werden, da A und B verschiedene Zeichen haben.

Inzwischen ist zu merken, daß einen diese Methode auf einen Irthum verleiten könnte, wenn A und B nicht einerley Zeichen hätten. Denn in den Fällen, wo diese Größen verschiedene Zeichen hätten, könnte der wahre Werth von $\sqrt[3]{A+B}$, bey dem n, so klein seyn, daß die nächste ganze Zahl, welche man an die Stelle dieses Werthes setzet, für . . . . . .

$$\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\frac{\sqrt[3]{A+B}}{2}}$$

eine Zahl gäbe, welche von der wahren um eine, oder mehr Einheiten, unterschieden wäre. Wenn man z. E. die Cubicwur-

bicwurzel von $45 - 29\sqrt{2}$ nehmen sollte, so bekäme man, wenn man $A = 45$ und $B = -29\sqrt{2}$ machte, 1 für die nächste ganze Zahl von $\sqrt[3]{A+B}$ oder $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$; und da $\sqrt[3]{AA - BB}$ alsdenn 7 wäre, so würde p oder $\left(\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}\right) : 2$ in diesem Falle gleich 4 gefunden werden; ob es gleich wirklich nicht mehr, als 3 ist, wie man aus dem Ausdrucke $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$ der vorhergehenden Methode sehen kann.

Was man in diesem Falle zu thun hat.

Aber wenn nur diese neue Methode, das p zu bekommen, allemal, wenn A und B einerley Zeichen haben, sicher zu gebrauchen ist, so kömmt nicht viel darauf an, ob sie auf diejenigen Fälle anzuwenden ist, da diese Größen verschiedene Zeichen haben. Denn man sieht wohl, daß man in diesen Fällen nur erstlich sowohl A als B positiv voraussetzen, und hernach die Wurzel von $p + q$ nehmen; alsdenn aber dem p eben das Zeichen, welches A hat, und dem q eben das Zeichen, welches B hat, geben darf.

Es kömmt also nunmehr nur noch darauf an, sich zu versichern, ob allemal, wenn A und B einerley Zeichen haben, oder, welches einerley ist, wenn sowohl A als B positiv ist, man, ohne einen Irthum zu besorgen, in . . . .

$\sqrt[3]{A+}$

$\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}$ an die Stelle der . . . $\sqrt[3]{A+B}$ die nächste ganze Zahl setzen kann? Um uns davon zu überzeugen, wollen wir erstlich setzen, man irrete sich, wiewohl der Irthum nie so groß seyn kann, um $\frac{1}{2}$, wenn man für $\sqrt[3]{A+B}$ die nächste ganze Zahl nähme. In diesem Falle würde die Größe, welche man für p bekäme, seyn . . . .

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2}}}{2}.$$

Zu zeigen, daß dieser Ausdruck keine Zahl geben kann, welche von dem wahren Werthe von p um Eins unterschieden ist, wollen wir in dieser Größe $p+q$ anstatt $\sqrt[3]{A+B}$, und $pp-qq$ anstatt n setzen; so wird daraus werden . . . .

$$\frac{p+q \pm \frac{1}{2} + \frac{pp-qq}{p+q \pm \frac{1}{2}}}{2}.$$

Wenn man hiervon p abzieht, so bekömmt man, durch die Abkürzung, $\frac{\pm q + \frac{1}{4}}{2p + 2q \pm 1}$ für den Irthum, welcher aus derjenigen Bestimmung des p entstehen kann, da man die ganze Zahl anstatt $\sqrt[3]{A+B}$ nimmt. Nun ist aber klar, daß diese Größe niemals $\frac{1}{2}$ gleich werden kann. Denn da in dem

dem ersten Ausdrucke $\frac{q+\frac{1}{4}}{2p+2q+1}$, welchen sie in sich hält, der Zähler $q+\frac{1}{4}$ schon kleiner ist, als die Hälfte von $2q+1$, so muß er um desto mehr kleiner seyn, als die Hälfte von $2p+2q+1$; und da in dem andern Ausdrucke $\frac{-q+\frac{1}{4}}{2p+2q-1}$, welchen sie auch in sich enthält, der Zähler $-q+\frac{1}{4}$ kleiner ist, als die Hälfte von $2q$, so ist er folglich auch kleiner, als die Hälfte von $2q+2p-1$.

Also kann man sich nicht um Eins irren, wenn man p nach der vorhergehenden Art bestimmet; und folglich wird man allemal, wenn eine Größe, z. E. $A+B$, in welcher, weder unter, noch vor dem Wurzelzeichen, eine Bruchzahl ist, eine Cubicwurzel $p+q$, haben soll, in welcher auch keine Bruchzahl seyn soll, diese Wurzel durch die vorhergehende Methode finden.

XLI.

Ein Fall, in welchem die vorhergehende Methode zu einem Irthume verleiten köñte.

Aber wenn die Größe $A+B$, ob sie gleich, sowohl ausser dem Wurzelzeichen, als unter demselben, lauter ganze Zahlen enthält, eine Cubicwurzel mit gebrochenen Zahlen haben sollte, wie z. E. die Größe $2+\sqrt{5}$, wovon die Cubicwurzel ist, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, so würde weder die vorhergehende, noch die im XXXV. §. vorgetragene Methode, etwas geben, und sie würde in einen Irthum verleiten, indem sie machen würde, daß man glaubte, es sey gar keine Cubicwurzel aus dieser Größe zu bekommen.

Diesem

Diesem Uebel abzuhelfen, muß man erstlich unmittelbar untersuchen, welches alle diejenigen Wurzeln mit Brüchen sind, deren Cubiczahlen ganze Zahlen seyn können. Wie man sich davor in acht nehmen kann.

Diese zu finden, wollen wir alle diese Wurzeln durch $\frac{p}{m} + \frac{q}{n}$ vorstellen, so daß man nämlich setzet, p und m wären ganze Zahlen, welche keinen Theiler mit einander gemein hätten, und q wäre die Wurzel einer ganzen Zahl, welche sich nicht mit der Zahl n abkürzen ließe. Wenn man diese Größe cubiret, so bekömmt man $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mnn}$ für den rationalen Theil, und $\frac{3pp}{nmm} + \frac{qq}{n^3} \times q$ für den incommensurablen Theil. Ferner muß, kraft der Bedingungen der Aufgabe, welche wir auflösen wollen, sowohl die erste Größe $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mnn}$, als auch der Coefficient $\frac{3pp}{nmm} + \frac{qq}{n^3}$ der andern eine ganze Zahl seyn.

Wir wollen erstlich $\frac{3p^2}{mmn} + \frac{qq}{n^3}$ gleich b machen, welches eine ganze Zahl ausdrücken soll. Man bekömmt also $qq = bn^3 - \frac{3ppnn}{mm}$. Aber diese Größe muß, vermöge der Bedingung, eine ganze Zahl seyn. Folglich muß $\frac{3ppnn}{mm}$ eine ganze Zahl seyn; folglich muß auch $\frac{3nn}{mm}$ eine seyn, und folglich muß n ein Vielfaches von m seyn.

Dieses

Dieses vorausgesetzet, wollen wir $n = ml$ machen; und so bekömmt man $qq = bm^3l^3 - 3ppll$. Wenn man diese Werthe von n und von qq in $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pqq}{mnn}$ an ihre Stellen setzet, so wird diese Größe, nach geschehenen Abkürzungen, $-\frac{8p^3}{m^3} + 3pbl$, welches eine ganze Zahl seyn muß. Da aber p und m keinen Theiler mit einander gemein haben, so kann diese Größe keine ganze Zahl seyn, wenn m nicht entweder 1 oder 2 ist. Das m ist also bestimmt. Was das n oder das ml anlanget, so sieht man bald, daß es gleich m seyn muß, weil die Gleichung $qq = bm^3l^3 - 3ppll$ giebt $\frac{q}{l} = \sqrt{bm^3l - 3pp}$, und folglich $\frac{q}{ml}$ oder $\frac{q}{n} = \frac{1}{m}\sqrt{bm^3l - 3pp}$, welches zeigt, daß der andere Theil keinen andern Nenner haben kann, als der erste, und daß folglich dieser Nenner niemals mehr seyn kann, als 2 oder 1.

Wenn man also nach der vorhergehenden Methode die Wurzel einer Größe $A + B$, deren rationaler oder commensurabler Theil A und der irrationale B ganze Zahlen sind, nicht hat finden können, so darf man nur diese Größe durch 8 vermehren, und nach eben dieser Methode die Cubicwurzel der neuen Größe, welche man durch diese Vermehrung bekömmt, suchen. Wenn es nicht gelingt, so ist man sicher, daß die vorgegebene Größe kein Cubus ist. Wenn es aber gelingt, so ist die Hälfte der Cubicwurzel,

zel, welche man alsdenn bekömmt, die gesuchte Wurzel.

XLII.

Wenn die Zahl *A* und die Wurzelgröße *B* Brüche sind, so ist klar, daß man, wie in dem XXXIV. §. *A* und *B* auf einerley Nenner bringen, und hernach die Cubicwurzel des Nenners durch die Cubicwurzel des Zählers theilen muß.

XLIII.

Wenn man die Cubicwurzel aus einer Größe ziehen sollte, welche aus zwo Wurzelgrößen vom zweyten Grade zusammengesetzt wäre, es sey nun eine Zahlen- oder Buchstabengröße, so dürfte man sie nur durch den Cubus einer von den Wurzelgrößen, welche diese Größe enthielte, vermehren. Da es hernach mit dem Producte eben die Beschaffenheit hätte, wie mit den Größen, von welchen itzo gehandelt worden, so müßte man auf eben diese Art die Cubicwurzel daraus ziehen, und sie durch die Wurzelgröße theilen, mit deren Cubus man die vorgegebene Größe vermehret hatte.

Was man zu thun hat, wenn die Cubicwurzel die Summe zwoer Wurzelgrößen seyn soll.

XLIV.

Wenn man die Wurzel vom vierten Grade einer Größe, wie $A+B$, finden will, so darf man erstlich nur die Quadratwurzel suchen. Denn wenn man keine findet, so wird man um desto mehr auch keine Wurzel vom vierten Grade, oder Biquadratwurzel, finden. Wenn man eine findet, so darf man nur die Quadratwurzel der Größe suchen, welche man, da man das

Wie man die Wurzel vom vierten Grade von denen Größen findt, welche von eben der Art sind, wie die vorhergehenden.

erste mal die Wurzel ausgezogen, gefunden hat.

XLV.

Was man allemal thun muß, wenn der Exponent der Wurzel eine gerade Zahl ist.

Eben so verhält es sich allemal, wenn man eine Wurzel finden soll, deren Exponent eine gerade Zahl ist. Man muß erstlich die Quadratwurzel suchen; und alsdenn läuft die Aufgabe dahinaus, daß man die Wurzel von einem Exponenten, welcher die Hälfte von dem ersten ist, ausziehen muß.

XLVI.

Für die Wurzeln vom fünften Grade.

Wenn man die Wurzel vom fünften Grade von einer Größe $A+B$, wie die vorhergehenden waren, suchen wollte, so müßte man dieses nach einer Methode verrichten, welche der, die man bey der Cubicwurzel beobachtet hat, ähnlich wäre. Anstatt der beyden Lehrsätze, aus welchen man sah, daß $p = \frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, und daß $\sqrt[3]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$ sey, bekäme man diese $p = \frac{\sqrt[5]{A+B} + \sqrt[5]{A-B}}{2}$ . . . . und $\sqrt[5]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$, derer man sich eben so bedienen müßte, wie der vorhergehenden.

XLVII.

Eben so würde es mit Wurzeln von höhern Graden beschaffen seyn. Es sey m der Exponent der Wurzel, welche man aus $A+B$ ausziehen will; so bekömmt man diese beyden Lehrsätze

sätze $p = \frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2}$ . . . .

und $\sqrt[m]{A^2 - B^2} = p^2 - q^2$, welche man auf eben die Art, wie bey den Cubicwurzeln, anwenden kann.

Diese Lehrsätze überhaupt zu beweisen, darf man nur zeigen, daß, wenn $A+B$ die Potenz m von $p+q$ ist, $A-B$ die Potenz m von $p-q$ ist. Denn es wird daraus nothwendig folgen, daß $\sqrt[m]{A+B} \times \sqrt[m]{A-B}$ ist . . . $\overline{p+q} \times \overline{p-q}$ oder $pp - qq$, und daß $\frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2}$ ist $\frac{p+q+p-q}{2}$ oder p.

Was den Beweis hiervon anlanget, daß $A - B$ die Potenz m von $p - q$ ist, wenn $A+B$ die Potenz m von $p+q$ ist, so würde man leicht einen durch die Induction finden. Denn wenn man dem m nach und nach verschiedene Werthe gäbe, und befände, daß dieser Lehrsatz in jedem besondern Falle seine Richtigkeit hätte, so würde man daraus schließen, daß er überhaupt wahr wäre. Aber man sieht wohl, daß man sich an einer solchen Art zu beweisen nicht eher begnügen kann, als nur, wenn man keinen allgemeinen Ausdruck für die Potenz m von $p+q$, und für die Potenz m von $p-q$ finden könnte. Man muß also diesen allgemeinen Ausdruck suchen, welcher ohnedieß die Neugier aller Analysten erwecken muß.

XLVIII.

Von der Art, eine zweytheilige Größe auf eine jede Potenz zu erhöhen.

Um den allgemeinen Werth von $\overline{p+q}^{\,m}$, oder von $p+q$, so viel mal, als Eins in m enthalten ist, weniger Eins, durch sich selbst vermehrt, zu finden, wollen wir erstlich in dem, was wir in dem vorhergehenden gesehen haben, dasjenige suchen, was mit dieser Verrichtung eine Verwandschaft hat. Wir wollen in dieser Absicht dasjenige wieder vornehmen, was wir in dem II. §. des III. Theiles gesagt haben, wo wir eine Gleichung aus dem Producte ihrer Wurzeln $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c gemacht, und wo wir das Gesetz gefunden haben, nach welchem alle Glieder dieses Productes zusammengesetzet seyn müssen. Es ist leicht einzusehen, daß alles, was wir damals gesagt haben, auf gegenwärtigen Fall angewendet werden kann, wenn man setzet, daß alle Wurzeln einander gleich sind. Es bestund aber das, was wir im III. §. des III. Theiles von denen Gleichungen, deren Wurzeln $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c sind, gesagt haben, in folgendem:

1) Daß das erste Glied dieser Gleichung aus x, zu einer Potenz, welche der Zahl der Wurzeln gleich ist, erhoben, bestehen müßte.

2) Daß das zweyte Glied aus x, auf einen um Eins niedrigern Grad erhöhet, bestünde, und zum Coefficienten die Summe der Wurzeln hätte.

3) Daß das dritte Glied bestünde aus x, auf einen um zwo Einheiten niedrigern Grad erhöhet,

het, und zum Coefficienten hätte die Summe aller Producte der Wurzeln, zwo und zwo genommen.

4) Daß das vierte Glied bestünde aus x, auf eine um drey Einheiten niedrigere Potenz erhöhet, und zum Coefficienten hätte die Summe aller Producte der Wurzeln, drey und drey genommen; und so auch bey den andern Gliedern.

Wenn man also diese Anmerkungen in dem gegenwärtigen Falle anwendet, da alle Wurzeln einander gleich sind, und da ihre Anzahl überhaupt durch m ausgedrücket wird, so wird man sehen,

Daß das erste Glied ist x^m;

Daß das zweyte Glied ist x^{m-1}, durch ma vermehret; weil alle Wurzeln dem a gleich sind, und weil ihre Anzahl m ist;

Daß das dritte Glied ist x^{m-2}, mit einem Coefficienten, welcher gleich ist dem a^2 so viel mal genommen, als Rectangel ab, ac, bc &c, in dem Coefficienten des dritten Gliedes derjenigen Gleichung sind, welche durch das Product der Wurzeln $x+a$, $x+b$, &c, deren Anzahl gleich m vorausgesetzet wird, gegeben ist; weil jedes von allen Producten ab, ac, bc, &c dem a^2 gleich seyn muß, wenn b, c, &c gleich a sind.

Daß das vierte Glied ist x^{m-3}, mit einem Coefficienten, welcher gleich ist, dem a^3, so viel mal genommen, als Producte abc, abd, acd,

 bcd,

bcd, &c in dem Coefficienten des vierten Gliedes derjenigen Gleichung sind, wovon die Anzahl der Wurzeln $x + a$, $x + b$, $x + c$, &c ist m; und so bey den übrigen Gliedern.

Es kömmt also nunmehr darauf an, zu wissen, wie viel aus einer Menge m von Buchstaben dergleichen Producte, als *ab*, *ac*, *bc*, &c entstehen, wenn ie zween und zween genommen werden; wieviel Producte *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*, &c daraus entstehen, wenn drey und drey genommen werden, wieviel Producte *abcd*, *abde*, *abce*, *acde*, *bcde*, &c entstehen, wenn viere und viere genommen werden ꝛc. Denn wenn man setzet, daß diese Zahlen gefunden wären, und wenn man sie durch *A*, *B*, *C*, *D*, &c ausdrückt, so wird $x^m + max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} + Ba^3 x^{m-3} + Ca^4x^{m-4} + Da^5x^{m-5} +$ &c der gesuchte Werth von $\overline{x+a}^m$ seyn.

Um nun erstlich zu finden, wieviel unter einer Menge m von Buchstaben *a*, *b*, *c*, &c Producte von zween Buchstaben *ab*, *ac*, *bc*, &c genommen werden mögen, wenn man sie auf alle mögliche Arten combiniret, so wollen wir erstlich anmerken, daß, wenn man alle diese Producte gemacht hat, man zweymal so viel Buchstaben, als Producte, geschrieben hat.

Hernach wollen wir anmerken, daß jeder Buchstabe *a*, *b*, *c*, &c gleich viel mal wiederholet werden muß, und daß jeder, da er nur durch alle die andern, und nicht durch sich selbst, kann ver-

$$A\quad \overline{p+q}^{\frac{r}{n}} = p^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n}p^{\frac{r}{n}-1}q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}p^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}p^{\frac{r}{n}-3}q^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}p^{\frac{r}{n}-4}q^4 + \&c.$$

$$B\quad \overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$C\quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.}^{\,n}$$

$$s = \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$$

$$D\quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1+s}^{n}$$

$$E\quad 1 + rz + \frac{r\times\overline{r-1}}{2}z^2 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}}{2\times3}z^3 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c. = 1 + ns + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 + \&c.$$

$$F\quad \left\{\begin{array}{l} 1 \\ + ns \\ + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 \\ \qquad + \&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 \\ + n\times\frac{r}{n}z + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2 + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3 + n\times\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c. \\ \qquad + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}z^2 + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\,z^3 + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}\times\frac{r^2}{n^2}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{\frac{7r}{n}-11}{12}}\,z^4 + \&c. \\ \qquad\qquad + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}\times\frac{r^3}{n^3}z^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}\times\frac{3r^3}{2n^3}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\,z^4 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}\times\frac{r^4}{n^4}z^4 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \&c. \end{array}\right\}$$

$$G\quad 1 + ns + \frac{n\times\overline{n-1}}{2}s^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3}s^3 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4}s^4 + \&c. = 1 + rz + \frac{r\times\overline{r-1}}{2}z^2 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}}{2\times3}z^3 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}\times\overline{r-3}}{2\times3\times4}z^4\ \&c.$$

die Anzahl der Buchstaben m war, die Anzahl der Producte aus zween und zween gleich war der Hälfte der Zahl m, durch die Zahl $m - 1$, welche um Eins kleiner ist, vermehret. Wenn also die Anzahl der Buchstaben $m - 1$ ist, so muß man gleichfalls die Hälfte $\frac{m-1}{2}$ von dieser Zahl nehmen, und sie durch $m - 2$ vermehren, welches um Eins kleiner ist, als $m - 1$. Das ist, $\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ ist diejenige Zahl, welche ausdrücket, wieviel mal jeder von den Buchstaben a, b, c, &c in allen erwähnten Producten wiederholet wird; und da die Anzahl dieser Buchstaben m ist, so wird $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ die Anzahl aller geschriebenen Buchstaben seyn. Folglich wird die gesuchte Anzahl der Producte aus jeden drey Buchstaben abc, abd, &c seyn $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$; und dieses ist der Werth von B, oder der Coefficient des vierten Gliedes.

Was den Coefficienten C des fünften Gliedes, das ist, die Anzahl der Producte aus jeden vier Buchstaben, welche eine Anzahl von m Buchstaben geben muß, anlanget, so wird man auf eben diese Art finden, daß er $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}$ seyn muß; denn diese Zahl muß das Viertel der Zahl aller in diesen Producten geschriebenen Buchstaben seyn, und jeder von diesen Buchstaben muß gleich viel mal wiederholet, und mit allen Producten aus drey Buchstaben, welche

A $\overline{p+q}^{\,-\frac{r}{n}} = p^{-\frac{r}{n}} - \frac{r}{n}p^{-\frac{r}{n}-1}q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}p^{-\frac{r}{n}-2}q^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}p^{-\frac{r}{n}-3}q^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}p^{-\frac{r}{n}-4}q^4 + \&c.$

B $\overline{1+z}^{\,-\frac{r}{n}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$

C $\frac{1}{\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4 + \&c.$

D $\frac{1}{1+\frac{r}{n}z+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4\ \&c.} = 1-\frac{r}{n}z+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2-\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4+\&c.$

E $1-\frac{r}{n}z+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2-\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3}z^3+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}\times\overline{\frac{r}{n}+3}}{2\times3\times4}z^4-\&c.$

$+\frac{r}{n}z^2-\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}z^2 \quad +\frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^3 \quad -\frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times3\times4}z^4+\&c.$

$+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^2-\frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^3 \quad +\frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2\times2}z^4+\&c.$

$+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^3-\frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times3}z^4+\&c.$

$+\frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}\times\overline{\frac{r}{n}-3}}{2\times3\times4}z^4-\&c.$

$+\&c.$

XLIX.

Was den Werth von $\overline{p-q}^{m}$ anlanget, so ist es klar, daß man, um denselben zu finden, das q in dieser Formel nur negativ machen darf, wodurch sie in $p^{m} - mqp^{m-1} + \ldots\ldots$ $\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^2p^{m-2} - \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times 3}$ $q^3p^{m-3} +$ &c wird verwandelt werden.

L.

Beweis des im XLVII §. enthaltenen Lehrsatzes

Wenn man nun den im XLVII. §. enthaltenen Lehrsatz beweisen will, so bemerke man erstlich, daß A ist die Summe aller Glieder p^{m} $+\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^2p^{m-2} + \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times 3\times 4}$ q^4p^{m-4} &c, in welchen keine ungerade Dimension von q ist, und daß B ist die Summe aller Glieder mqp^{m-1}, $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times 3}$ q^3p^{m-3}, $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times 3\times 4\times 5}$ q^5p^{m-5} &c, in welchen q allemal auf eine ungerade Dimension erhöhet ist.

Man wird hernach sehen, daß $A+B$ die erste, und $A-B$ die zweyte Formel ist; und dieses war eben dasjenige, worauf im XLVII. §. die Schwierigkeit ankam.

LI.

Anwendung der vorhergehenden Formel auf ein Exempel.

Wenn man die vorhergehende Formel zur Erhöhung einer jeden zweytheiligen Größe auf eine gegebene Potenz brauchen will, so wird nichts leichter seyn, als dieses. Man darf nur in dem vorhergehenden Werthe von $\overline{p+q}^{m}$ an die Stelle des p das erste Glied der gegebenen zweytheiligen Größe, an die Stelle des q das zweyte Glied, und an die Stelle des m den Exponenten der Potenz, auf welche man die vorgegebene zweytheilige Größe erhöhen will, setzen. Wenn man z. E. $3ac - 2bd$ auf die fünfte Potenz erhöhen will, so mache ich

$$3ac = p$$
$$-2bd = q$$
$$5 = m,$$

und bekomme erstlich . . . .

$$p^{m} = \overline{3ac}^{5} = 243\, a^5 c^5.$$

$$m q p^{m-1} = 5 \times \overline{-2bd} \times \overline{3ac}^{4} = -810\, a^4 b c^4 d.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2} = 10 \times 4bbdd \times \overline{3ac}^{3} = 1080\, a^3 bbc^3 dd.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 10 \times \overline{-2bd}^{3} \times \overline{3ac}^{2} = -720\, a^2 b^3 c^2 d^3.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4} = 5 \times \overline{-2bd}^{4} \times 3ac = 240\, ab^4 cd^4.$$

$m \times m$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5}\,q^5\,p^{\overline{m-5}}$$

$$=1\times\overline{-2bd}^{\,5}\times\overline{3ac}^{\,0}=-32b^5d^5.$$

Was die andern Glieder anlanget, so müssen ihre Coefficienten alle Null seyn, da bey jedem einer von seinen Factoren $m-5$ ist, welches, da man $m=5$ vorausgesetzet hat, Null ist. Also wird der Werth von $\overline{3ac-2bc}^{\,5}$ seyn $243a^5c^5-810a^4bc^4d+1080a^3b^2c^3d^2-720a^2b^3c^2d^3+240ab^4cd^4-32b^5d^5$.

LII.

Wie man die vorhergehende Formel auf Größen von mehr, als zwey Gliedern anwendet.

Wenn man eine aus mehr, als zwey Gliedern, zusammengesetzte Größe auf eine gegebene Potenz erhöhen will, so kann man es auch leicht nach eben dieser Methode verrichten. Wenn man dieses z. E. mit einer dreytheiligen Größe thun soll, so wird es, wenn man p das erste Glied dieser dreytheiligen Größe, und q die Summe der beyden andern Glieder derselben nennet, nicht schwerer seyn, die dreytheilige Größe zu erhöhen, als eine zweytheilige, weil keines von den Gliedern $mp^{\overline{m-1}}q$, $\frac{m\times\overline{m-1}}{2}p^{\overline{m-2}}q^2$ &c eine zu erhöhende Größe enthalten wird, welche aus mehr, als aus zween Theilen, zusammengesetzet wäre.

Und wenn man eine aus noch mehr Theilen zusammengesetzte Größe hat, so kann man allezeit die Schwierigkeit dadurch heben, daß man dieselbe Größe als eine aus wenigern Theilen zusammengesetzte Größe ansieht.

LIII.

Um ein Exempel von der Art zu geben, wie man die vorhergehende Formel auf die Erhöhung einer aus mehr, als aus zween Theilen bestehenden Größe, anwendet, so wollen wir $a + 2b - c$ auf die vierte Potenz erhöhen. Man macht $m = 4$, $p = a$, $q = 2b - c$, und wenn man diese Werthe in der Formel an die gehörigen Stellen setzet, so bekömmt man Exempel.

$$p^m = a^4;\ mqp^{m-1} = 4 \times \overline{2b - c} \times a^3$$
$$= 8a^3b - 4a^3c;$$
$$\frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2} = 6 \times \overline{2b - c}^2 \times a^2$$
$$= 24a^2b^2 - 24a^2bc + 6a^2c^2;$$
$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 4 \times \overline{2b - c}^3 \times a$$
$$= 32ab^3 - 48abbc + 24abcc - 4ac^3;$$
$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4} \ldots\ldots$$
$$= \overline{2b - c}^4 = 16b^4 - 4 \times \overline{2b}^3 \times c \ldots$$
$$+ \frac{4 \times 3}{2} \times \overline{2b}^2 \times c^2 - \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 3} \times 2b \times c^3$$
$$+ \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} c^4 = 16b^4 - 32b^3c + 24bbcc$$
$$- 8bc^3 + c^4;$$

und folglich $\overline{a + 2b - c}^4 = a^4 + 8a^3b - 4a^3c + 24a^2b^2 - 24a^2bc + 6a^2c^2 + 32ab^3 - 48abbc + 24abcc - 4ac^3 + 16b^4 - 32b^3c + 24b^2c^2 - 8bc^3 + c^4.$

LIV.

Nachdem man die vorhergehende Formel gefunden, hat man gar bald muthmaßen müssen, daß sie sich auch auf andere Potenzen erstrecken müsse, als auf diejenigen, welche ganze und positive Zahlen zu Exponenten haben. Es war genug, daß man eingesehen, es gäbe noch andere Potenzen, als jene, um zu versuchen, ob diese Formel auch auf dieselben anzuwenden sey. Da man z. E. gesehen, daß man anstatt $\sqrt[n]{a}$ schreiben kann $a^{\frac{1}{n}}$, so wird man sich sogleich vorgestellet haben, daß, wenn man die Wurzel n von einer jeden durch $p+q$ vorgestellten zusammengesetzten Größe nehmen will, man nur in der vorhergehenden Formel $m = \frac{1}{n}$ machen müsse; oder, welches einerley ist, man wird gedacht haben, daß $p^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} p^{\frac{1}{n}-1} q + \frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} - 1}{2} p^{\frac{1}{n}-2} q^2 +$ &c müsse ausdrücken $\overline{p+q}^{\frac{1}{n}}$ oder die Wurzel n von $p+q$.

Eben so wird man vermuthet haben, daß man in eben dem Werthe von $\overline{p+q}^{m}$ nur $m = -n$ machen dürfe, um $\frac{1}{\overline{p+q}^{n}}$ oder

$\frac{}{p+}$

$\overline{p+q}^{\,-n}$ zu finden; welches gäbe $p^{-n} - n\, p^{-n-1}\, q - \frac{n \times \overline{-n-1}}{2}\, p^{-n-2}\, q^2 -$ &c. Mit einem Worte, die Ordnung und Allgemeinheit, welche man allezeit in den analytischen Operationen gefunden, mußte auf die Gedanken bringen, daß, obgleich anfänglich die vorhergehende Formel nur gefunden worden, als man vorausgesetzet, daß m eine ganze und positive Zahl sey, sie doch auf alle andere Werthe von m angewendet werden könne. Aber wenn man es auch noch so wahrscheinlich fände, daß dem also sey, so würde sich doch ein Mathematiker an dieser Wahrscheinlichkeit noch lange nicht begnügen lassen. Alles, was sie in seinem Verstande wirken könnte, wäre dieses, daß er dadurch angereizet würde, sich Mühe zu geben, um einen Beweis davon zu erlangen. Diesen Beweis hat man auf folgende Art, auf welche leicht zu kommen war, finden können.

Es wird gezeigt, daß die vorhergehende Formel noch gültig ist, wenn der Exponent ein Bruch ist.

Wir wollen erstlich zeigen, daß die vorhabende Formel allezeit angewendet werden kann, wenn m ein jeglicher positiver Bruch ist, oder, welches einerley ist, wir wollen die Gleichung A beweisen, (man sehe die erste von den beygefügten beyden Tafeln) welche zu der Gleichung B wird, wenn man alle Glieder durch $p^{\frac{r}{n}}$ theilet, und $\frac{q}{p} = z$ setzet.

Aber um die Gleichung B zu beweisen, ist es genug, zu zeigen, daß, wenn man ihre

beyden

beyden Hälften auf einerley Potenz n erhebet, gleiche Größen herauskommen, das ist, (wenn man setzet . . . .

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1}}{2} \times z^2 \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1} \times \overline{\frac{r}{n} - 2}}{2 \times 3} \times z^3 \;\&c)$$ es kömmt nur darauf an, die Gleichung D zu beweisen.

Da nun r und n zwo ganze Zahlen sind, so kann man die angezeigten Erhöhungen in dieser Gleichung vermittelst des allgemeinen Werthes von $\overline{p+q}^m$ machen; welches die Gleichung E giebt.

Nachdem es in der Aufgabe nun darauf ankömmt, die Gleichung E zu beweisen, so muß man, vermittelst des Werthes von s, die Werthe von s^2, s^3, s^4, &c suchen, hernach den Werth von s^2 durch n, den Werth von s^2 durch $\frac{n \times \overline{n-1}}{2}$, den Werth von s^3 durch $\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{2 \times 3}$, den Werth von s^4 durch $\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}{2 \times 3 \times 4}$, &c vermehren, um die Werthe von allen Gliedern der zweyten Hälfte der Gleichung E zu bekommen. Nachdem man diese Werthe gefunden, und einen unter den andern geschrieben hat, muß man die Gleichung F machen, welche, wenn man die Abkürzungen machet, welche die zweyte Hälfte erfordert

fordert, zu der Gleichung *G* wird, die mit der Gleichung *E* einerley ist. Folglich ist die Gleichung *A*, welche diese Gleichung gegeben hatte, bewiesen. Folglich ist es wahr, daß man die im XLVIII. §. gegebene Formel eben sowohl auf jede Potenz, deren Exponent ein positiver Bruch ist, als auf Potenzen, welche ganze positive Zahlen zu Exponenten haben, anwenden kann.

LV.

Eben diese Formel erstreckt sich auch auf die negativen Potenzen.

Um nun auch zu zeigen, daß eben diese Formel auch auf negative Potenzen, ihre Exponenten mögen ganze Zahlen, oder Brüche seyn, angewendet werden könne, muß man (man sehe die zweyte von den beygefügten beyden Tafeln) die Gleichung *A* beweisen, deren zweyte Hälfte diejenige ist, welche die im XLVIII. §. enthaltene Formel giebt, wenn man $m = -\frac{r}{n}$ machet.

Es ist klar, daß man, anstatt die Gleichung *A* zu beweisen, sich begnügen kann, die Gleichung *B* zu beweisen, welche mit der ersten einerley ist, woferne man $z = \frac{q}{p}$ setzet, und die beyden Glieder durch $p^{\frac{r}{n}}$ vermehret.

Es ist ferner klar, daß man anstatt der Größe $\overline{1+z}^{\,-\frac{r}{n}}$ setzen kann $\frac{1}{\overline{1+z}^{\,\frac{r}{n}}}$, und

daß folglich aus der Gleichung *B* die Gleichung *C* wird. Da man aber in der ersten Hälfte dieser Gleichung anstatt $\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}$ den Werth davon, welchen man aus der Formel im LIV. §. bekömmt, setzen kann, so ist klar, daß es nur noch nöthig ist, die Gleichung *D* zu beweisen. Diese Gleichung nun zu beweisen, ist es genug, die zweyte Hälfte durch den Nenner der ersten zu vermehren, und sich zu versichern, daß das herauskommende Product die Einheit, als der Zähler der ersten Hälfte, ist. Dieses ist auch wirklich so. Denn wenn ich die Vermehrung verrichte, so kömmt zum Producte die Größe *E* heraus, deren erstes Glied, welches Eins ist, das einzige ist, welches nach der Abkürzung übrig bleibt. Also hat man sich nunmehr durch einen Beweis versichert, daß die Formel im XLVIII. §. ganz allgemein ist; welches man vorher nur von ihr vermuthete.

LVI.

Aber so sehr man auch durch einen allgemeinen Beweis von einer Wahrheit versichert ist, so will man sie doch immer auch gern durch eine besondere Anwendung bestätiget sehen. Wenn man z. E. weis, daß die vorhergehende Formel zur Erhöhung jeglicher Größen auf Bruchpotenzen gut ist, so ist es natürlich, daß man sie auch auf eine Größe anwenden will, von welcher man schon weis, daß sie vollkommen eine Wurzel oder eine gebrochene Potenz hat.

$p^{\frac{r}{n}-4} \quad q^4 + \&c$

$\times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \over 2 \times 3$ s

$\times \overline{\frac{r}{n}-1} \times \overline{\frac{r}{n}-2}$ over $2 \times 3 \times 4$

$1 \times \frac{r^2}{n^2} \times \frac{r}{n} - 1 \times$

$\times \overline{n-2} \over 3$ $\times \frac{3r^3}{2n^3} \times \frac{r}{n}$

$\times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \over \times 3 \times 4$ $\times$

$\times \overline{r-1} \times \overline{r-2} \over 2 \times 3$ z^3

Man soll z. E. die Potenz $\frac{1}{2}$ von der Größe $1 + 2b + b^2$, oder, welches einerley ist, die Quadratwurzel von dieser Größe suchen. Wenn man in der vorhergehenden Formel $p = 1$, $q = 2b + b^2$, und $m = \frac{1}{2}$ gemacht hat, so wird man finden . . . . Exempel einer durch die Formel der Erhöhung der Potenzen gefundenen Quadratwurzel.

Das erste Glied . . . . $p^m = 1$,

das zweyte . . . . . $mp^{m-1} q = b + \frac{1}{2}b^2$,

das dritte . . . $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{2}b^2$
$-\frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$,

das vierte . . . . $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} p^{m-3} q^3$
$= \frac{1}{2}b^3 + \frac{3}{4}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$,

das fünfte $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4$
$= -\frac{5}{8}b^4 - \frac{5}{4}b^5 - \frac{15}{16}b^6 - \frac{5}{16}b^7 - \frac{5}{128}b^8$,

das sechste ꝛc. Und die Summe aller dieser Glieder muß die gesuchte Wurzel seyn.

Wenn man diese Größe zuerst sieht, so hat man Mühe, zu glauben, daß sie durch Abkürzung auf $1+b$, von welchem man weis, daß es die gesuchte Wurzel ist, gebracht werden kann. Aber die Allgemeinheit des vorhergehenden

Beweises, und eine gewisse Erfahrung im Rechnen versichern einen bald von der Richtigkeit dieser Abkürzung.

Wenn man alle diese Glieder zusammensetzet, so bemerket man, daß das erste 1 ganz stehen bleibt; daß das zweyte $b + \frac{1}{2}b^2$ auf b gebracht wird, weil der Theil $\frac{1}{2}b^2$ dieses zweyten Gliedes durch eben diese Größe, welche mit — in dem dritten Gliede $-\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$ vorkömmt, aufgehoben wird; daß das, was von dem dritten Gliede, nachdem sich $\frac{1}{2}b^2$ aufgehoben, übrig bleibt, nämlich $-\frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$, auch gänzlich durch das vierte Glied $\frac{1}{2}b^3 + \frac{3}{4}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$ aufgehoben wird, von welchem hernach nichts mehr, als $\frac{5}{8}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$, übrig bleibt: und dieser Rest des vierten Gliedes wird ebenfalls durch das fünfte Glied aufgehoben, und wenn man mit den Abkürzungen noch weiter fortfährt, so sieht man, daß von der ganzen Größe nichts, als $1 + b$, übrig bleibt; welches auch so seyn sollte.

LVII.

Ausser dem, daß dieses Exempel, und alle Exempel von eben dieser Art, welche man leicht machen kann, den im LI. §. bewiesenen Satz, so zu sagen, durch die Erfahrung bekräftigen, so zeigen auch diese Exempel zugleich einen wirklichen Nutzen dieses Satzes, indem sie ein Mittel

an die Hand geben, die Wurzeln aus Größen ausszuziehen, welche vollkommene Potenzen sind. Aber man kann noch viel andere Vortheile aus diesem Satze ziehen. Wenn die Größe, von welcher man eine Wurzel finden will, nicht vollkommen eine solche Wurzel hat, so bekömmt man durch die vorhergehende Formel eine, welche ihr nahe kömmt.

Wenn die Größen keine vollkommenen Wurzeln haben, so findet man welche nach der vorhergehenden Methode, welche ihnen nahe kommen.

Exempel.

Es soll z. E. die 5te Wurzel von der Größe $a+b$ gesuchet werden. Wenn man den größten von den beyden Theilen dieser Größe, welcher a seyn soll, an die Stelle des p setzet, und wenn man den kleinsten b an die Stelle des q, und $\frac{1}{5}$ an die Stelle des m setzet, so bekömmt man für die gesuchte Wurzel . . . .

$$a^{\frac{1}{5}} + \tfrac{1}{5}a^{-\frac{4}{5}}b - \frac{1\times4}{2\times25}a^{-\frac{9}{5}}b^2 \ldots\ldots$$

Was eine unendliche Reihe ist.

$$+\frac{1\times4\times9}{2\times3\times125}a^{-\frac{14}{5}}b^3 - \frac{1\times4\times9\times14}{2\times3\times4\times625}a^{-\frac{19}{5}}b^4$$

$$+\frac{1\times4\times9\times14\times19\,a^{-\frac{24}{5}}b^5}{2\times3\times4\times5\times3125} - \text{\&c} \ldots\ldots$$

$$\text{oder } a^{\frac{1}{5}} \times \overline{1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \frac{6b^3}{125a^3} - \frac{21b^4}{625a^4}}$$

$+$ &c.

Ob man nun gleich alsdenn erst, wenn man auf eben diese Art unendlich viel Glieder wird gemacht haben, versichert seyn kann, daß die vorhergehende Größe, welche unter diejenigen gehört, die unendliche Reihen genennet werden, die gesuchte Wurzel vollkommen ausdrücket: so kömmt man doch schon der gesuchten Wurzel überaus nahe, wenn man sich begnüget, nur eine große Menge dieser Glieder zu machen. Ja, wenn es sich zuträgt, daß a weit größer ist, als b, so hat man nicht viel Glieder nöthig, um sich der wahren Wurzel gar merklich zu nähern.

Wenn man z. E. $b = \frac{1}{10} a$ setzet, so bekömmt man für die sechs ersten Glieder der vorhergehenden Reihe . . . .

$$\overline{a^{\frac{1}{5}} \times 1 + \frac{1}{50} - \frac{2}{1250} + \frac{3}{62500} - \frac{21}{6250000} \ldots} \; \overline{+ \frac{399}{1562500000}}.$$

Wenn man nun auf die beträchtliche allmählige Verminderung dieser sechs Glieder Acht hat, so sieht man, daß die Glieder, welche man noch ferner schreiben könnte, so klein seyn würden, daß es sich nicht der Mühe verlohnen würde, sie zu suchen.

LVIII.

Der Nutzen der Formel der Potenzen besteht auch

auch nicht nur darinne, daß man durch Näherung alle Arten von Bruchpotenzen und negativen Potenzen findet: er erstrecket sich noch unendlich weiter, indem diese Formel dazu dienet, alle Arten von Größen, in welchen so viel Wurzelzeichen, Theiler ꝛc. sind, als man nur will, in Reihen auszudrücken.

Alle Arten von Größen können durch die vorhergehende Formel in Reihen ausgedrücket werden.

Wenn man z. E. die Größe $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}}{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-b}}$

hat, so kann man, wenn man erstlich die beyden Größen $\sqrt[3]{a+b}$ und $\sqrt[3]{a-b}$ in Reihen ausdrücket, sie züsammensetzet, und hernach die Reihe, welche die Summe davon ist, auf die Potenz $\frac{1}{4}$ erhöhet, eine neue Reihe machen, welche, wenn sie hernach durch die Reihe, welche man eben so für . . . .

$\dfrac{1}{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-b}}$ oder $\overline{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-b}}^{\,-1}$

fände, vermehret würde, endlich eine einzige Reihe gäbe, um die vorgegebene Größe auszudrücken. Ausser dem aber, daß man also durch die Näherung alle solche, aus Wurzelgrößen,

oder verwickelten Theilern bestehende Größen haben kann, giebt es noch unendlich viel Fälle, da es, um der Beweise willen, sehr nützlich ist, daß man alle diese Wurzelgrößen und verwickelten Theiler aus solchen Größen wegschaffe; wie denn dieses geschieht, wenn man sie in Reihen verwandelt. Aber es ist Zeit, wieder auf die Auflösung der Gleichungen zu kommen.

Anfangs-

Anfangsgründe der ALGEBRA.

Fünfter Theil.

Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade.

Indem man von der Auflösung der überhaupt durch $ax^{m} = b$ und $ax^{2m} + bx^{m} = c$ ausgedrückten Gleichungen zu denen, welche, ausser diesen Gliedern, auch die dazwischen befindlichen enthalten, hat wollen fortgehen, so hat man gar bald Schwie-

rigkeiten angetroffen, um welcher willen man die Hoffnung, diese Gleichungen überhaupt aufzulösen hat fahren lassen. Man hat noch nicht weiter, als bis auf die Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade kommen können: ja es leidet die zu Auflösung derselben erfundene Methode noch eine große Ausnahme. Bey Entdeckung dieser Methode hat man folgendermaßen verfahren können.

I.

Die am meisten zusammengesetzte Gleichung vom dritten Grade.

Es seyn durch die Gleichung $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ alle Gleichungen vom dritten Grade vorgestellet. Wenn man diese Gleichung in eine andere verwandeln könnte, welche nur das erste und das letzte Glied hätte, so ist klar, daß sie dadurch vollkommen aufgelöset seyn würde. Welches ist aber das natürlichste Mittel, eine Gleichung in eine andere zu verwandeln, in welcher man die Freyheit hat, eine Veränderung zu machen? Es besteht darinne, daß man in dieser Gleichung an die Stelle der unbekannten Größe eine Größe setzt, in welcher man einen Buchstaben unbestimmt läßt, um sich desselben nach Gefallen bedienen zu können.

II.

Verwandlung, durch welche man aus dieser Gleichung ein Glied wegbringt, welches man will.

Wenn wir also in dieser Gleichung anstatt y setzen $x + r$, so bekommen wir $x^3 + \overline{3r + d} \times xx + \overline{3rr + 2dr + e} \times x + r^3 + dr^2 + er + f = 0$, welches man auch also schreibt

$x^3 +$

$$\begin{array}{llll} x^3 + 3rx^2 & + 3rrx & + r^3 & = 0 \\ \quad + d & + 2dr & + dr^2 & \\ & + e & + er & \\ & & + f & \end{array}$$

Da man in dieser Gleichung mit dem r machen kann, was man will, so ist leicht zu begreifen, daß man, vermittelst desselben, ein Glied, welches man will, wegschaffen könne: doch kann man nicht mehr, als eins auf ein mal, wegbringen.

Wenn man z. E. machet $3r + d = 0$, oder $r = -\frac{1}{3}d$, so wird das zweyte Glied verschwinden, und die Gleichung wird also aussehen

$$\begin{array}{lll} x^3 + ex & + \frac{2}{27}d^3 & = 0 \\ -\frac{1}{3}dd & - \frac{de}{3} & \\ & + f. & \end{array}$$

Wenn man hingegen machet . . . . $3rr + 2dr + e = 0$, oder $r = -\frac{1}{3}d \pm \sqrt{-\frac{e}{3} + \frac{1}{9}dd}$, so wird das dritte Glied verschwinden, und die beyden andern werden bleiben.

Wenn man das letzte Glied wegbringen wollte, so würde man machen müssen $r^3 + dr^2 + er + f = 0$, und alsdenn müßte man, um r zu bekommen, eine solche Gleichung, wie die vorgegebene ist, auflösen.

Wer ein wenig im Rechnen geübt ist, der mußte gleich vermuthen, daß, wenn man $x + r$ an die Stelle des y setzte, man dadurch nicht mehr, als ein Glied, auf einmal wegbringen könnte, weil die Hineinbringung einer unbekannten Größe nur zu Auflösung einer einzigen

Glei-

Gleichung, oder, welches einerley ist, nur zu Erfüllung einer einzigen Bedingung dienen kann: nun machet aber die Wegschaffung eines jeden Gliedes eine Bedingung aus. Ob man nun aber gleich durch diese Verwandlung nicht gänzlich den vorgesetzten Zweck erreichet hat, nämlich die vorgegebene Gleichung auf zwey Glieder herunter zu setzen, so hat man doch wenigstens die Frage in eine andere verwandelt, welche einfacher zu seyn scheinet, weil nunmehr nur die Frage von einer Gleichung mit drey Gliedern ist.

Von den Gleichungen, welche man bekommen kann, wenn man entweder das erste, oder das zweyte Glied wegschafft, ist die erstere, nämlich

$$\begin{array}{llll} x^3 & + e\,x & + \frac{2}{27}d^3 & = 0 \\ & - \frac{1}{3}d^2 & - \frac{de}{3} & \\ & & + f & \end{array}$$

die einfachste; und diese wollen wir auch aufzulösen suchen, indem wir uns bemühen werden, ihre Glieder noch mehr zu vermindern. Aber wir wollen diese Untersuchung auf einen Augenblick aussetzen, weil die Methode, welche wir itzo angewendet haben, um die Gleichungen vom dritten Grade zu verwandeln, so natürlich neue Wahrheiten, in Ansehung der Gleichungen von allen andern Graden, an die Hand giebt, daß es rathsam ist, uns ein wenig dabey aufzuhalten.

III.

Man sieht sogleich, daß man durch Hülfe eben dieser Verwandlung des y in $x + r$ auch

ein

ein jedes Glied, welches man will, aus einer Gleichung von einem jeglichen Grade wegbringen kann.

Anwendung der vorhergehenden Verwandelung auf eine Gleichung vom vierten Grade.

Wenn man z. E. die allgemeinste Gleichung vom vierten Grade $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ hat, so bekömmt man, wenn man in derselben $x + r$ anstatt y setzet,

$$\begin{array}{lllll} x^4 + & 4rx^3 + & 6r^2x^2 + & 4r^3x + & r^4 = 0. \\ & + a & + 3ar & + 3ar^2 + & ar^3 \\ & & + b & + 2br + & brr \\ & & & + c & + cr \\ & & & & + d. \end{array}$$

Wenn man in dieser Gleichung machet $4r + a = 0$ oder $r = -\frac{1}{4}a$, so bekömmt man eine Gleichung vom vierten Grade, welche kein zweytes Glied hat.

Eben so, wenn man r durch die Gleichung vom zweyten Grade $6r^2 + 3ar + b = 0$ bestimmt, so wird man eine Gleichung vom vierten Grade bekommen, welche kein drittes Glied hat. Und wenn man r zu einer solchen Größe machte, daß man dadurch die Gleichung vom dritten Grade $4r^3 + 3ar^2 + 2br + c = 0$ auflösen könnte, so würde man eine Gleichung vom vierten Grade bekommen, welche kein viertes Glied hätte. Das fünfte Glied würde ebenfalls, vermittelst einer Gleichung vom vierten Grade, verschwinden. Aber man schafft gemeiniglich kein anderes, als das zweyte Glied, weg, weil die Wegschaffung der übrigen Glieder fast allemal verwickelte und sehr mühsame Rechnungen mit Wurzelgrößen verursachet.

Manschafft gemeiniglich nur das zweyte Glied weg.

IV.

IV.

Wegschaffung des zweyten Gliedes in einer Gleichung vom fünften Grade.

In einer allgemeinen Gleichung vom fünften Grade $y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$ giebt das verwandelte $y = x + r$ die Gleichung $x^5 + 5rx^4 +$ &c. worinne das zweyte Glied $+a$ durch die Gleichung vom ersten Grade $5r + a = 0$ oder $r = -\frac{1}{5}a$ verschwindet.

V.

In einer Gleichung von einem jeglichen Grade m.

Und überhaupt wird es in einer Gleichung von einem jeglichen Grade m, welche durch $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} +$ &c $= 0$ vorgestellet wird, leicht seyn, durch die im IV. Theile im XLVIII. §. gegebene Formel der Potenzen zu finden, daß das zweyte Glied verschwindet, wenn man die unbekannte Größe $x = y - \frac{a}{m}$ machet.

VI.

Auflösung der allgemeinen Gleichung $x^3 + px + q = 0$.

Nach dieser kleinen Ausschweifung wollen wir wieder zurückgehen, und die Auflösung der Gleichung vom dritten Grade

$$\begin{matrix} x^3 + e\,x + \frac{2}{27}d^3 = 0 \\ -\frac{1}{3}d^2 \quad - \frac{de}{3} \\ +f \end{matrix}$$

suchen, in welche die allgemeine Gleichung $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ war verwandelt worden, da man $y = x - \frac{1}{3}d$ gesetzet hat, und zu Verkürzung der Rechnung wollen wir sie also schreiben, $x^3 + px + q = 0$.

Dem

Dem zufolge, was wir schon gethan haben, wollen wir noch eine Verwandlung machen. Wir wollen z. E. $u+z$ anstatt x setzen, und dieses nicht, wie wir das erste mal gethan, in der Absicht, ein Glied dieser Gleichung wegzuschaffen; denn man würde bald sehen, daß das verschwundene Glied wieder kommen würde: sondern, um diese Gleichung in einfachere Gleichungen zu zergliedern zu suchen. Ohne eben deutlich einzusehen, daß es durch dieses Mittel gelingen muß, merket man wohl, daß die Verwandlung einer Gleichung in eine andere, wo man einen Buchstaben nach Belieben bestimmen kann, meistentheils nützlich seyn muß.

Wenn man $u+z$ an die Stelle des x gesetzet hat, so bekömmt man . . . . $u^3+3uuz+3uzz+z^3+pu+pz+q=0$. Wir wollen nunmehr setzen, es wäre eine von den unbekannten Größen u oder z so beschaffen, daß $u^3+z^3+q=0$ wäre, so bekömmt man in diesem Falle die Gleichung $3u^2z+3uz^2+pu+pz=0$, aus welcher man leicht, wenn man sie durch $u+z$ theilet, bekömmt, $3uz+p=0$ oder $u=-\frac{p}{3z}$. Hierdurch nun kann man leicht eine von den eingebrachten unbekannten Größen wegbringen. Nun darf man nur noch wissen, was für eine Gleichung die andere unbekannte Größe bestimmet. Dieses zu erfahren, muß man diesen Werth von u wieder in die erste Gleichung $u^3+z^3+q=0$ bringen, welches giebt $-\frac{p^3}{27z^3}+z^3+q=0$, oder $z^6+qz^3=\frac{p^3}{27}$.

Ob nun gleich diese Gleichung von einem höhern Grade ist, als die vorgegebene, so ist sie doch viel leichter aufzulösen. Denn sie gehöret zu der Classe derjenigen, welche wir in dem XX. §. des vierten Theiles aufgelöset haben, und der Werth, welchen sie für z giebt, ist ....
$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$. Es wird also u oder $-\frac{p}{3z}$ seyn $\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}$, welches leicht in $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ verwandelt wird. Denn man kann gar leicht sehen, daß das Product von $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ durch $+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ ist $\frac{1}{27}p^3$, und daß folglich $\frac{1}{3}p$ das Product aus den Cubicwurzeln dieser Größen ist. Wenn wir also nunmehr diese Werthe von u und von z zusammensetzen, so bekommen wir $u + z$ oder ....

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \ldots\ldots$$
$$-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}},$$ oder bloß
$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \ldots\ldots$$
$$-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$ Denn wenn man die Wurzelgröße $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ mit $-$ nimmt, so bekömmt man einen Werth von x, welcher von dem nicht unterschieden ist, den man bekömmt, wenn man sie mit $+$ nimmt.

VII.

VII.

Aus diesem Werthe von x sieht man, daß es sich mit den Gleichungen vom dritten Grade nicht so verhält, wie mit den Gleichungen vom zweyten Grade, als in welchen einerley Ausdruck einer Wurzel, vermittelst des Zeichens $\pm$, die beyden Wurzeln zugleich anzeigte. Hier findet man einen Ausdruck, welcher nur einen von den drey Werthen von x andeuten kann.

Die vorhergehende Formel giebt nur eine von den drey Wurzeln.

Um die beyden andern Wurzeln zu finden, muß man die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ durch die Wurzel, welche der vorhergehende Werth von x giebt, theilen, so wird die Auflösung der Gleichung vom zweyten Grade, welche der herauskommende Quotient seyn wird, die beyden andern gesuchten Wurzeln geben.

Wenn man den allgemeinen Werth dieser beyden Wurzeln finden will, so muß man, um die Rechnungen zu verkürzen . . . .

Wie man die beyden andern findet.

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = m$ und . . . . .

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = n$ machen, und bemerken, daß in diesem Falle $mn = \frac{1}{3}p$ und $m^3 - n^3 = q$ ist. Dieses vorausgesetzet, so wird die Theilung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ durch $x + m - n$, welches alsdenn die gefundene Wurzel ist, zum Quotienten geben $xx + nx - mx + mm + nn + mn = 0$, wovon die beyden Wurzeln, das ist, die beyden gesuchten Wurzeln der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, sind . .

$$x = \frac{m-n}{2} \pm \tfrac{1}{2} \times \overline{m+n} \times \sqrt{-3} \text{ oder } \ldots$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3},$$

welche nothwendig allemal unmöglich sind, wenn $\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}$ eine wirkliche Größe ist. Man hätte die Art der Unvollkommenheit, welche bey der Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade durch die unterschiedene Form der drey Wurzeln entsteht; schon im V. §. des vierten Theiles, wo nur die Frage von den Auflösungen der Gleichungen von zwey Gliedern war, wahrnehmen können: aber diese Art der Unvollkommenheit fällt hier mehr in die Augen, da sie sich in der allgemeinen Auflösung befindet.

VIII.

Ein Fall, in welchem die vorhergehende Formel das x nicht bekannt machen kann, wegen der darinne befindlichen unmöglichen Größen.

Dieser Mangel in der vorhergehenden Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade kann nur denen einer zu seyn scheinen, welche die Algebra, so zu sagen, metaphysisch betrachten. Aber sie hat noch einen andern Mangel, welcher einen jeden noch viel mehr stutzig machen muß, und welcher allen Berechnern überaus viel Mühe gemacht hat. Er bestehet darinne, daß diese Auflösung ganz und gar nichts für den Werth von x anzeigt, so oft $\tfrac{1}{27}p^3$ größer, als $\tfrac{1}{4}qq$, und zugleich negativ ist. In diesem Falle, welcher einen sehr großen Umfang hat, ist die Größe $\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}$ unmöglich, und folglich sind die

die beyden Größen

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ und

$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, welche den Werth von x ausmachen, auch unmöglich. Aber man kann daraus nicht schließen, daß der Werth von x unmöglich sey, als welches so wenig für einen Mangel der Auflösung angesehen werden müßte, daß es vielmehr diese Auflösung zu einer vollständigen Auflösung machen würde; gleichwohl kann man auch nicht, wenigstens durch die bisher bekannten Methoden, bestimmen, welches die wirkliche Größe ist, die diesen Werth von x ausdrücket.

IX.

Man kann nicht nur aus dem Ausdrucke des x in diesem Falle nicht schließen, daß die gesuchte Wurzel unmöglich ist: sondern man hat sich auch durch verschiedene Mittel versichert, daß dieser Werth alsdenn allezeit wirklich ist. Von allen diesen Mitteln ist mir folgendes * als das sicherste vorgekommen.

Wir wollen den Werth von x, nämlich $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, wieder vornehmen. Wir wollen anstatt $\frac{1}{2}q$ setzen a, und anstatt $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, welches als unmöglich vorausgesetzet wird, wollen wir setzen

Es wird dennoch bewiesen, daß x in diesem Falle wirklich ist.

* Ich habe es aus einer Abhandlung des Herrn Nicole, Mem. der Akad. 1738. Jahr, 99. und 100. S. genommen.

$b\sqrt{-1}$: so bekömmt man $x = \sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$.

Nun wollen wir die Werthe von $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ und von $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, nach der Formel suchen, welche im XLVIII. §. des vierten Theiles für die Erhöhung der zweytheiligen Größen gegeben worden.

Wir bekommen also für die erste von diesen beyden Größen $-a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \&c.$ und für die zweyte $-a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \&c.$ und folglich wird der Werth von x die unendliche Reihe $-2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \frac{308}{6561}a^{-\frac{17}{3}}b^6 + \&c$ oder $-2a^{\frac{1}{3}} \times \overline{1 + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10b^4}{243a^4} + \frac{154b^6}{6561a^6} - \&c}$ seyn, welche gar keine unmögliche Wurzel in sich enthält. Also ist in dem Falle, da $\frac{1}{27}p^3$ negativ, und größer ist, als $\frac{1}{4}qq$, der Werth von x, nämlich $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$, welcher alsdenn

unter

unter einer unmöglichen Form erscheint, dennoch immer eine wirkliche Größe. Zum Unglücke hat man für denselben bis itzo noch nicht eine wirkliche Form ausfindig machen können, ausser wenn man, wie wir itzo gethan haben, eine unendliche Reihe von Gliedern, denselben auszudrücken, zuläßt; welches nur dienet, zu beweisen, daß dieser Werth wirklich ist, nicht aber, ihn vollkommen bekannt zu machen.

X.

Wenn man sich an einer Näherung begnügen will, so kann man sich der vorhergehenden Reihe bedienen. Denn wenn man a größer setzet, als b, so werden die Glieder dieser Reihe immer kleiner werden, und folglich kann man die übrigen weglassen, so bald man auf solche gekommen ist, die nur sehr kleine Größen vorstellen. Hingegen wenn a kleiner ist, als b, so muß man, indem man sich der Formel der zweytheiligen Größen bedienet, um $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ und $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ zu finden, $b\sqrt{-1}$ für das erste Glied der zweytheiligen Größe, und a für das zweyte nehmen. Dadurch bekömmt man alsdenn für den Werth von x oder von . . . . $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ die Größe $+\frac{2}{3}b^{-\frac{2}{3}}a - \frac{10}{81}b^{-\frac{8}{3}}a^3 + \frac{44}{729}b^{-\frac{14}{3}}a^5 - \frac{748}{19683}b^{-\frac{20}{3}}a^7 + \&c$ oder . . . .

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}\times\overline{-1+\frac{5a^2}{27b^2}-\frac{22a^4}{243b^4}+\frac{374a^6}{6561b^6}-\&c}$$

Durch eben diese Methode kann man durch Näherung einen Werth von x finden.

welche eben sowohl wirklich ist, als der vorige Ausdruck, und in welcher alle Glieder abnehmen, wenn a kleiner ist, als b.

Die beyden andern Werthe von x sind in eben diesem Falle auch wirklich.

XI.

Wir haben im VII. §. gesehen, daß von den drey Wurzeln der Gleichung $x^3+px+q=0$ diejenigen, welche durch . . . .

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3}$$

ausgedrücket werden, alle beyde unmöglich sind, so oft als $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ eine wirkliche Größe ist. Itzo werden wir sehen, daß diese beyden Wurzeln dennoch allemal wirklich sind, wenn $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ unmöglich ist, das ist, allemal, wenn p negativ und so beschaffen ist, daß $\frac{1}{27}p^3$ größer ist, als $\frac{1}{4}qq$.

Denn wenn man, vermittelst der itzo gebrauchten Benennungen, den Ausdruck dieser beyden Werthe von x in . . . .

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}\times\sqrt{-3}$$

verwandelt, und, wie wir gethan haben, die Größen $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ und $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ in Reihen ausdrücket, so bekömmt man für diese beyden Werthe von x, ...

$$a^{\frac{1}{3}}\times\overline{1+\frac{bb}{9aa}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{154b^6}{6561a^6}-\&c.}$$

$\pm a$

$$\pm \frac{b}{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}} \times 1 - \frac{5bb}{27aa} + \frac{22b^4}{243a^4} - \frac{374b^6}{6561a^6} + \&c$$

welches ein gänzlich wirklicher Ausdruck ist.

XII.

Da die allgemeinste durch $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ vorgestellte Gleichung vom dritten Grade in

$$x^3 + ex + \tfrac{2}{27}d^3 = 0$$
$$- \tfrac{1}{3}d^2 - \frac{de}{3}$$
$$+ f$$

oder ferner, nachdem man $y = x - \frac{1}{3}d$ gesetzet, in $x^3 + px + q = 0$ ist verwandelt worden, so folget daraus, daß die Werthe von y in der allgemeinen Gleichung $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ diejenigen sind, welche man bekömmt, wenn man diese letztere Gleichung $x^3 + px + q = 0$ auflöset, und von ihren drey Wurzeln $\frac{1}{3}d$ abziehet.

Wie man aus den Wurzeln der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ die Wurzeln der Gleichung $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ herleitet.

XIII.

Hieraus folget, daß eine jegliche Gleichung vom dritten Grade, in Ansehung der wirklichen oder unmöglichen Wurzeln, vollkommen unter eben demjenigen Falle begriffen ist, unter welchem sich die Gleichung befindet, welche sie hervorbringt, wenn das zweyte Glied verschwindet.

In einer Gleichung vom dritten Grade sind entweder alle drey Wurzeln wirklich, oder es ist eine wirklich, und zwo sind unmöglich.

Man sieht also, wenn man sich des VII. und IX. §. erinnert, daß in einer jeden Gleichung vom dritten Grade wenigstens eine wirkliche Wurzel seyn muß, und daß die beyden andern allemal entweder alle beyde wirklich, oder alle beyde unmöglich sind.

XIV.

Wie man diese Fälle unterscheidet.

Um zu unterscheiden, welcher von diesen beyden Fällen in einer gegebenen Gleichung vom dritten Grade statt findet, so muß man erstlich das zweyte Glied wegschaffen, damit man die Gleichung mit der Gleichung $x^3+px+q=0$ vergleichen könne. Findet man nun, wenn dieses geschehen ist, daß p positiv ist, oder daß es, wenn es negativ ist, so beschaffen ist, daß $\frac{1}{27}p^3$ nicht größer ist, als $\frac{1}{4}qq$, so hat sie nur eine wirkliche Wurzel, welche nach der im VI. §. enthaltenen Formel völlig bestimmet werden kann.

Wenn hingegen p negativ, und so beschaffen ist, daß $\frac{1}{27}p^3$ größer ist, als $\frac{1}{4}qq$, so sind die drey Wurzeln wirklich: aber keine von denselben kann durch die im VI. §. enthaltene Formel bestimmet werden; es sey denn, daß man sich an einer Näherung begnüge, dergleichen diejenige ist, da man diese Formel in eine unendliche Reihe verwandelt.

XV.

Wie die Wurzeln beschaffen sind, wenn $\frac{1}{27}p^3$ negativ und $=\frac{1}{4}qq$ ist.

Wenn es sich zutrüge, daß $\frac{1}{27}p^3$ negativ und $\frac{1}{4}qq$ gleich wäre, so könnte man zweifelhaft seyn, auf welchen von den beyden vorhergehenden Fällen sich die Gleichung bezöge; das ist, man könnte zweifeln, ob sie nur eine wirkliche Wurzel habe, oder ob sie alle drey wirklich wären, weil, da alsdenn $\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}$ Null wäre, man nicht wüßte, ob man es unter die positiven, oder unter die negativen Größen zählen sollte. Aber wenn man die drey vorhin gefundenen Wurzeln

oder

oder Werthe von x ansiehet, so läßt sich die Frage bald entscheiden. Denn der erste durch

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

ausgedrückte Werth wird alsdenn auf $-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$ abgekürzt, und die beyden andern überhaupt durch . . . .

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$$
$$\pm\overline{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}\times\sqrt{-3}$$

ausgedrückten Werthe werden alsdenn auf $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}\pm 0$ abgekürzt; das ist, sie sind alle beyde $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$ gleich. Also werden die Gleichungen, in welchen $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ Null ist, unter diejenigen gezählet, in welchen alle drey Wurzeln wirklich sind.

XVI.

Anwendung der vorhergehenden Methoden auf ein Exempel.

Um nun einige Anwendungen der vorhergehenden Regeln zu machen, wollen wir erstlich setzen, man solle die Gleichung $y^3+3yy-3y+25=0$ auflösen. Erstlich bringt man das zweyte Glied dieser Gleichung weg; welches geschieht, wenn man, nach dem II. §. $y=x-1$ setzet. Die Gleichung ohne das zweyte Glied, welche man bekömmt, wenn man dieses $x-1$ an seine Stelle setzet, ist $x^3-6x+30=0$, welche, wenn man sie mit $x^3+px+q=0$ vergleicht, giebt $p=-6$, und $q=30$.

Wenn man diese Werthe in $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ an die gehörigen Stellen setzet, so wird aus dieser Größe $\sqrt{217}$, welches eine wirkliche Größe ist. Also muß die im VI. §. enthaltene Formel in diesem Falle den gesuchten Werth von x geben.

Wenn man nun in dieser Formel . . . . .
$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$
setzet 15 anstatt $\frac{1}{2}q$, und $\sqrt{217}$ anstatt . . .
$\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, so wird aus diesem allgemeinen Werthe von x . . . .
$\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}$, welches die einzige wirkliche Wurzel ist, die in der Gleichung $x^3-6x+30=0$ enthalten ist, und die nicht einfacher ausgedrücket werden kann. Wenn man hernach diesen Werth von x in der Gleichung $y=x-1$ an seine Stelle setzet, so bekömmt man $y=\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}$ . . .
$-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}-1$ für die einzige wirkliche Wurzel der vorgegebenen Gleichung $y^3+3yy-3y+25=0$.

XVII.

Ein ander Exempel mit einer Gleichung vom sechsten Grade, welche auf eine vom dritten Grade heruntergesetzet werden kann.

Wenn man eine Gleichung vom sechsten Grade hätte, in welcher die unbekannte Größe auf gar keine ungerade Dimension erhöhet wäre, so ist klar, daß man sie nach eben der vorhergehenden Methode auflösen würde, weil diese Gleichung sich sogleich durch eine Verwandlung auf den dritten Grad würde heruntersetzen lassen.

Wenn

Wenn man z. E. $z^6+9z^4+39zz+55=0$ hat, so kann man, wenn man zz als die unbekannte Größe dieser Gleichung betrachtet, und wenn man, nach den vorhergehenden Grundsätzen, zz einer neuen unbekannten Größe x weniger dem dritten Theile des Coefficienten des zweyten Gliedes gleich, das ist, $zz=x-3$, setzet, diese Gleichung in $x^3+12x-8=0$ verwandeln, welche nur vom dritten Grade ist, und welche auch kein zweytes Glied hat.

Wenn man hernach diese Gleichung mit $x^3+px+q=0$ vergleicht, so bekömmt man $p=12$, $q=-8$, und folglich ...... $\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}=\sqrt{80}$, und folglich ist x oder $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}$ $=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$; und man bekömmt hernach, da man $zz=x-3$, oder $z=\sqrt{x-3}$ setzet, die gesuchte unbekannte Größe $x=\pm\sqrt{\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}-3}$, und die beyden Werthe, welche dieser Ausdruck, indem man die Wurzelgröße mit + und mit − nimmt, giebt, sind die einzigen beyden wirklichen Werthe von den sechs Werthen, welche die vorgegebene Gleichung haben muß.

Ueberhaupt kann man, wenn man eine Gleichung, wie $z^{3m}+az^{2m}+bz^{m}+c=0$ hat, dieselbe sogleich auf eine Gleichung vom dritten Grade, und ohne das zweyte Glied, heruntersetzen, wenn man $z^m=x-\frac{1}{3}a$ machet. Gleichungen von höhern Graden, die man eben so heruntersetzen kann.

XVIII.

XVIII.

Wir wollen itzo setzen, man habe die Gleichung $x^3 + 3x - 4 = 0$ aufzulösen. Da diese Gleichung kein zweytes Glied hat, so kann man sie sogleich mit $x^3 + px + q = 0$ vergleichen, durch welche Vergleichung man bekömmt $p = 3$, und $q = -4$, und da p positiv ist, so sieht man aus dem XIV. §. daß die im VI. §. enthaltene allgemeine Formel in diesem Falle auch zu gebrauchen ist. Wenn man wirklich diese Werthe von p und von q in dieser allgemeinen Formel

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}qq}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}qq}}$$

an ihre Stellen setzet, so bekömmt man für den einzigen wirklichen Werth von x, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}}$. Wenn man itzo die im XXXV. XXXVIII. und XLI. §. des vierten Theiles gegebene Methode auf diesen Ausdruck anwendet, so sieht man, daß er sich leicht abkürzen läßt, weil $2 + \sqrt{5}$ der Cubus von $\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$ ist, und weil $-2 + \sqrt{5}$ der Cubus von $-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$ ist; daher dieser Werth von x auf 1 abgekürzet wird.

Man hätte ohne diese Formel zu eben diesem Werthe von x gelangen können, wenn man sich der im XII. und XIII. §. des dritten Theiles gegebenen Regel bedienet hätte. Denn man würde gefunden haben, daß $x - 1$ ein vollkommener Theiler der Größe $x^3 + 3x - 4$ ist.

XIX.

XIX.

Viertes Exempel, in welchem die im VI. §. enthaltene Formel unzulänglich ist.

Wir wollen itzo setzen, man solle die Gleichung $x^3 - 90x - 98 = 0$ auflösen. Wenn man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ vergleicht, so bekömmt man $p = -90$ und $q = -98$. Da aber p negativ und so beschaffen ist, daß $\frac{1}{27}p^3$ größer ist, als $\frac{1}{4}qq$, so gehöret die vorgegebene Gleichung mit zu denjenigen, welche nicht nach der vorhergehenden Formel können aufgelöset werden. Ich untersuche hierauf nach der im XII. und XIII. §. des dritten Theiles gegebenen Methode, ob sie nicht etwan einen Theiler hat, und da ich sehe, daß sie keinen hat, so bediene ich mich der im X. §. gegebenen Methode, um durch die Näherung einen Werth zu finden.

Anwendung der im X. §. enthaltenen Methode, die Wurzeln durch Näherung zu finden.

Um deswillen setze ich erstlich in die allgemeine Formel . . . .

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}qq}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}qq}}$$

anstatt p und q ihre Werthe -90 und -98, und bekomme . . . .

$$x = \sqrt[3]{49 + \sqrt{-24599}} - \sqrt[3]{-49 + \sqrt{-24599}}$$

welches, wenn man es mit dem Ausdrucke $\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$, welcher (X. §.) zu der unendlichen Reihe . . . . .

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \times -1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6} - \&c$$

geworden war, vergleicht, $a = -49$, . . $bb = +24599$ giebt. Dieses nun darf man

nur

nur in dieser unendlichen Reihe an die gehörigen Stellen setzen.

Solches zu verrichten, nehme ich erstlich die Cubicwurzel von 24599, um $b^{\frac{2}{3}}$ zu bekommen. Wenn dieses geschehen ist, so bekomme ich ohngefähr 29,08 für diese Cubicwurzel, und folglich ist $\frac{-2a}{3b^{\frac{2}{3}}}$ oder $\frac{-98}{3\sqrt[3]{24599}}$ ohngefähr $\frac{10000}{8902}$.

Wenn ich hernach a quadrire, und es durch bb theile, so bekomme ich für $\frac{aa}{bb}$ ohngefähr 0,0976, wovon das Quadrat 0,00952 der Werth von $\frac{a^4}{b^4}$ ist. Was den Werth von $\frac{a^6}{b^6}$ und den noch höhern Potenzen anlangt, so ist er in dieser Reihe unnütz, da in derselben der Unterschied der Glieder ziemlich groß ist.

Wenn ich hierauf die Werthe von $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ an die Stellen dieser Größen setze, so bekomme ich ohngefähr —1,104 für den durch die im VI. §. enthaltene Formel gegebenen Werth von x. Wenn man die beyden andern Werthe von x, welche, zufolge des XIV. §. auch wirklich seyn müssen, haben will, so darf man nur die Gleichung $x^3 - 90x - 98 = 0$ durch $x + 1,104$ theilen, welches, zufolge dem, was wir gesehen haben, fast genau eine von ihren Wurzeln ist. Wenn die Theilung geschehen ist, so bekömmt man zum Quotienten $xx - 1,104x - 88,781$, und zum Reste 0,0142, welche Größe klein genug ist, daß man sie aus der Acht lassen kann, so, daß man die Gleichung $xx - 1,104x$ —88,

$-88,781=0$, als den vollkommenen Quotienten der Theilung des $x^3-90x-98=0$ durch $x+1,104$, und als das Product der beyden gesuchten Wurzeln betrachten kann. Wenn man also diese Gleichung auflöset, so bekömmt man für die beyden Werthe von x, welche sie giebt, $x=0,552\pm\sqrt{89,0857}$, das ist, $+9,990$ und $-8,886$.

Also sind die drey Werthe von x in der vorgegebenen Gleichung $x^3-90x-98=0$ beynahe $-1,104$; $+9,990$; $-8,886$. Was die vollkommenen Werthe anlangt, so können sie durch gar keine der bisher bekannten Methoden gefunden werden, und keine Gleichung, welche, gleichwie die vorhergehende, zwar rationale Coefficienten, aber keinen rationalen Theiler hat, kann nach diesen Methoden aufgelöset werden, wenn $\frac{1}{27}p^3$ negativ, und größer ist, als $\frac{1}{4}qq$.

XX.

Unbequemlichkeit bey der im X. §. gezeigten Näherung.

Die Methode, welche wir angewendet haben, um die Gleichungen vom dritten Grade, in welchen alle drey Wurzeln wirklich sind, durch die Näherung aufzulösen, hat diese Unbequemlichkeit, daß, wenn a von b wenig unterschieden ist, die Glieder der Reihe, welche den Werth von x ausdrücket, so langsam abnehmen, daß man ihrer eine sehr große Menge haben muß, wenn man dem wahren Werthe von x ziemlich nahe kommen will, und daß folglich die Rechnungen überaus mühsam werden. Es ist also nöthig, eine Methode zu suchen, welche in der Ausübung von allgemeiner Bequemlichkeit sey.

XXI.

XXI.

Eine andere und in der Ausübung leichtere Methode der allgemeinen Näherung.

In dieser Absicht will ich die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ oder vielmehr $x^3 - px + q = 0$ (weil die Fälle, in welchen die im VI. §. gegebene Methode nicht angewendet werden kann, allemal nur in denjenigen Gleichungen vorkommen, wo p negativ ist) wieder vornehmen, und ihr diese Form $z^3 - z = r$ geben, welche einfacher ist, weil sie nur ein unbestimmtes Glied in sich hat.

Um nun diese Verwandlung zu machen, setze ich $x = mz$, wodurch die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ in $z^3 - \frac{p}{mm}z = -\frac{q}{m^3}$ verwandelt wird, woraus ich sehe, daß, indem ich, wenn q positiv ist, $m = -\sqrt{p}$, und wenn q negativ ist, $m = \sqrt{p}$ mache, ich der Gleichung $x^3 - px + q = 0$ die Form $z^3 - z = +r$ geben kann.

Nun bemerke ich, daß, wenn diese Gleichung von der Art derjenigen ist, welche nach der im VI. §. enthaltenen Formel nicht aufgelöset werden können, das r nothwendig kleiner seyn muß, als $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$ oder $\sqrt{\frac{4}{27}}$, und zugleich, daß eine von den Wurzeln derselben positiv und größer seyn muß, als Eins, aber kleiner, als $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Denn wenn z größer wäre, als $\sqrt{\frac{4}{3}}$, so bekäme man für r, das ist, für $z^3 - z$, mehr, als $\sqrt{\frac{4}{27}}$, und folglich würde die Gleichung $z^3 - z = r$ unter die Zahl derjenigen gehören, bey welchen die im VI. §. enthaltene Formel angewendet werden könnte.

Dieses

Dieses vorausgesetzt, mache ich $z = 1 + \delta$, und wenn ich diesen Werth in der Gleichung $z^3 - z = r$ an die gehörigen Stellen setze, so giebt er $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$. In dieser Gleichung bemerke ich, daß, weil δ allezeit eine kleinere Größe ist, als $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, das ist, weil es kleiner ist, als 0, 155, sein Cubus kleiner ist, als 0, 0037. Da nun aber dieser Cubus so klein ist, so sehe ich, daß man keinen großen Irrthum begehen kann, wenn man das Glied δ^3 in der Gleichung $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$ aus der Acht läßt, das ist, wenn man sich begnüget, die Gleichung $2\delta + 3\delta\delta = r$ aufzulösen. Ich löse also diese Gleichung auf, und sie giebt mir $\delta = \pm\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}r} - \frac{1}{3} = \frac{\pm\sqrt{1+3r} - 1}{3}$ und folglich z oder $1 + \delta = \frac{2 \pm \sqrt{1+3r}}{3}$, oder bloß . . . . $z = \frac{2 + \sqrt{1+3r}}{3}$, weil man von den Werthen von z nur denjenigen suchet, welcher größer als Eins und positiv ist.

Um zu wissen, wie groß der Irrthum seyn kann, welchen man bey dieser Methode begeht, indem man das Glied δ^3 wegläßt, so wollen wir den Fall nehmen, da dieses Glied am größten ist. Wir wollen setzen, z oder $1 + \delta$ wäre $\sqrt{\frac{4}{3}}$, welches doch niemals seyn kann, wenn die vorgegebene Gleichung unter diejenigen gehöret, bey welchen die im VI. §. enthaltene Methode nichts giebt: so bekommen wir $r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, und unsere Methode giebt uns für den Werth von z,

$\frac{2+\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$, anstatt des wahren Werthes $\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. Es ist aber klar, daß diese beyden Größen nur ungefähr um $\frac{1}{1000}$ von einander unterschieden sind. Folglich beläuft sich der größte Irrthum, welchen man begehen kann, wenn man $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ für die positive Wurzel der Gleichung $z^3-z=r$ nimmt, noch nicht auf $\frac{1}{1000}$, wenn diese Gleichung zu denjenigen gehöret, welche man nach der im VI. §. enthaltenen Methode nicht auflösen kann.

Die ietzt gezeigte Methode giebt gleich anfänglich x wenigstens bis auf $\frac{1}{1000}$ richtig an.

Wenn man den Werth von z durch den Ausdruck $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ berechnet hat, so muß man ihn durch m vermehren, um durch Näherung den Werth von x zu bekommen.

XXII.

Wie man die Näherung noch genauer machet.

Wenn man nicht befindet, daß diese Auflösung der vorgegebenen Gleichung der wahren Auflösung nahe genug kömmt, das ist, wenn man die Fehler, welche sich auf ein Tausendtheil ohngefähr belaufen könnten, für allzu beträchtlich ansiehet, so ist nichts leichter, als einen andern weit richtigern Werth der Wurzel durch eine auf eben diesen Gründen beruhende Verrichtung zu finden. Nachdem man diesen ersten Werth von x berechnet, und ihn, um der Kürze willen, k genennet hat, so kann man sich gedenken, es wäre die zu machende Verbesserung ε, das ist,

ist, man kann setzen, der wahre Werth von x wäre $k+\varepsilon$. Wenn man hernach diese Größe in der Gleichung $x^3-px+q=0$ anstatt x an seine Stelle setzet, so bekömmt man $k^3+3k^2\varepsilon+3k\varepsilon^2+\varepsilon^3-pk-p\varepsilon+q=0$, oder bloß $k^3+3k^2\varepsilon+3k\varepsilon^2-pk-p\varepsilon+q=0$, indem man das Glied ε^3 wegläßt, als welches weit eher weggelassen werden kann, als in der ersten Operation das Glied δ^3, weil es unendlich kleiner ist. Wenn man hernach diese Gleichung auflöset, so wird der herauskommende Werth von ε die Verbesserung seyn, die man an dem erstern Werthe von x machen muß, damit man einen zweyten sehr viel richtigern Werth von x bekomme.

Wenn man sich an diesem zweyten Werthe noch nicht begnügen wollte, so würde man einen dritten finden, wenn man den zweyten l nennte, und wenn man in der vorgegebenen Gleichung $x^3-px+q=0$ anstatt x setzte $l+\varphi$; und so ferner.

Aber weit gefehlt, daß man ordentlicher Weise solche scharfe Verbesserungen nöthig haben sollte, so kann man sich vielmehr sehr oft an dem zuerst gefundenen Werthe von x begnügen, oder höchstens wird es genug seyn, nachdem man in der Gleichung $x^3-px+q=0$ anstatt x gesetzet hat $k+\varepsilon$, die Gleichung $k^3+3k^2\varepsilon-pk-p\varepsilon+q=0$ aufzulösen, das ist, ausser dem Gliede ε^3 auch das Glied $3k\varepsilon^2$ wegzulassen, weil dieses Glied schon sehr klein ist.

XXIII.

Anwendung dieser Methode auf ein Exempel.

Wir wollen itzo einige Anwendung von dieser Methode machen. Es sey z. E. die Gleichung $z^3 - z = \frac{1}{3}$. Wenn man in dem Ausdrucke $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ anstatt r setzt $\frac{1}{3}$, so wird daraus $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$, das ist ohngefähr 1, 138, welches ein wenig größer ist, als der wahre Werth von z. Aber er ist nur um ein sehr weniges größer, weil 1, 137, wie man leicht aus der Berechnung sehen kann, zu klein seyn würde.

Wenn man sich dem wahren Werthe von z noch genauer nähern will, so muß man in der Gleichung $z^3 - z = \frac{1}{3}$ anstatt z setzen 1, 138 $+ \varepsilon$, so bekömmt man 0,002426739 + 2, 885132ε = 0, indem man die Glieder, in welchen ε^2 und ε^3 ist, wegläßt. Wenn diese Gleichung aufgelöset worden, so giebt sie $\varepsilon = -$ 0, 000841, und folglich für den verbesserten Werth von z, 1, 137159. Wenn man diese Verbesserung schärfer hätte machen wollen, indem man nur das Glied, in welchem ε^3 ist, weggelassen hätte, so würde man die Gleichung ..... 0,002426739 + 2, 885132ε + 3,414ε^2 = 0 aufgelöset haben, welches die Verbesserung $\varepsilon = -$ 0, 000841836, das ist, für den verbesserten Werth von z, 1, 137158164, gegeben haben würde.

XXIV.

Ein ander Exempel.

Wir wollen nunmehr setzen, man solle die Gleichung $x^3 - 13x + 5 = 0$ auflösen. Wenn ich $x = - z\sqrt{13}$ mache, so wird sie in

$z^3 - z = \frac{5}{13\sqrt{13}}$ verwandelt. Wenn ich nun in dem erstern durch die Näherung gefundenen Werthe von z, $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, mache $r = \frac{5}{13\sqrt{13}}$, so wird dieser Werth $\frac{2+\sqrt{1+\frac{15}{13\sqrt{13}}}}{3}$, und giebt folglich für x, $\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{13+\frac{15}{\sqrt{13}}}}{3}$, das ist, ohngefähr $-3,784$. Wenn man einen richtigern Werth von x haben will, so muß man $x = -3,784 + \varepsilon$ setzen, und diesen Werth in der Gleichung $x - 13x + 5 = 0$ an die gehörigen Stellen setzen; und so bekömmt man, indem man die Glieder, in welchen ε^2 und ε^3 ist, wegläßt, die Gleichung $0,010205696 + 29,95597\varepsilon = 0$, welche $\varepsilon = -0,000341$, und folglich $x = -3,784341$ giebt, welcher Werth richtiger ist, als der erstere.

XXV.

Auflösung der allgemeinen Gleichung vom vierten Grade.

Nachdem wir gezeigt haben, wie man die Gleichungen vom dritten Grade auflöset, so wollen wir nunmehr sehen, was für ein Mittel man anwenden muß, um die Gleichungen vom vierten Grade aufzulösen.

Wenn man erstlich eine allgemeine Gleichung $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ nimmt, um dadurch alle Gleichungen vom vierten Grade vorzustellen, so kann man die Schwierigkeit gar bald in so weit heben, daß man nur eine Glei-

chung aufzulösen hat, welche durch $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ vorgestellet wird, indem man $y = z - \frac{1}{4}a$ setzet. Um nun hernach diese Gleichung aufzulösen, so scheint das leichteste Mittel dieses zu seyn, daß man sie als das Product zwoer Gleichungen vom zweyten Grade betrachte, und es so mache, daß die Bestimmung der Coefficienten, welche die Glieder dieser Gleichungen vom zweyten Grade haben werden, bloß auf Gleichungen ankomme, welche leichter aufzulösen sind, als die vorgegebene Gleichung.

Wir wollen erstlich $zz + xz + t = 0$ für die eine von diesen Gleichungen annehmen. Es ist klar, daß das zweyte Glied der andern Gleichung seyn muß $- xz$, weil das Product dieser beyden Gleichungen eine Gleichung geben muß, welche kein zweytes Glied hat. Wir wollen also für diese zweyte Gleichung nehmen $zz - xz + s = 0$. Wenn man diese beyden Gleichungen durch einander vermehret, so bekömmt man . . . . . .

$$\begin{aligned} z^4 + s\,zz &+ s\,xz + ts = 0. \\ - xx\;\; &- t\,x \\ + t\;\;\;\; & \end{aligned}$$

Wenn man diese mit der vorgegebenen Gleichung vergleicht, so giebt sie zu Bestimmung des s, t, x, die drey Gleichungen $s - xx + t = p$; $sx - tx = q$; $ts = r$.

Damit ich mich nun dieser drey Gleichungen bediene, so vermehre ich die erste durch x, und setze sie hernach mit der zweyten Gleichung zusammen. Dadurch bekomme ich $2sx - x^3 = px + q$, und daraus ziehe ich . . . . $s =$

$q +$

$\frac{q+px+x^3}{2x}$. Ich setze dieses in der Gleichung $ts = r$ an die gehörige Stelle, wodurch ich bekomme $t = \frac{2rx}{x^3+px+q}$.

Wenn ich nun diese beyden Werthe von s und von t in der Gleichung $sx - tx = q$ an ihre Stelle setze, so bekomme ich endlich . . . .

$$\frac{x^3+px+q}{2} - \frac{2rx^2}{x^3+px+q} = q, \text{ oder } \ldots$$

$$x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q^2 = 0,$$
$$\qquad\qquad -4r$$

Die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade kömmt auf eine Gleichung vom dritten Grade an.

eine Gleichung vom sechsten Grade, welche man, nach der im XVII. §. gegebenen Methode, in eine Gleichung vom dritten Grade verwandeln kann, wodurch die Schwierigkeit der Gleichungen vom vierten Grade in so weit gehoben ist, daß man nunmehr nur eine Gleichung vom dritten Grade aufzulösen hat. Denn wenn diese letzte Gleichung (welche man die reducirte nennet) aufgelöset worden, so darf man nur den Werth von x, welchen sie giebt, in den Gleichungen . . . $zz - xz + s = 0$, $zz + xz + t = 0$, oder vielmehr $zz - xz + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = 0$ und $zz + xz + \frac{2r}{xx+p+\frac{q}{x}} = 0$, an die gehörigen Stellen setzen, und hernach diese Gleichungen auflösen; oder, welches einerley ist, man muß den Werth von x in den Wurzeln . . . . . .

Diese Gleichung wird die reducirte genennet.

$$z = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}} \text{ und } \ldots$$

$z = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{2r}{xx+p+\frac{q}{x}} + \frac{1}{4}xx}$ dieser beyden Gleichungen an seine Stelle setzen, so bekömmt man die vier gesuchten Wurzeln der Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, und folglich die Wurzeln der vorgegebenen Gleichung $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, aus welcher jene Gleichung entstanden war.

XXVI.

Bey dem vierten Grade kann man die vier Wurzeln durch eine einzige Formel ausdrücken.

Es scheint anfänglich aus dem Ausdrucke dieser Werthe, daß man bey dem vierten Grade so wenig, als bey dem dritten, zu einem einzigen Ausdrucke für alle Wurzeln der Gleichung gelangen könne. Allein wenn man bemerket, daß die Größe x, welche die beyden vorhergehenden Ausdrücke enthalten, nothwendig eine Quadratwurzelgröße ist, weil sie aus der Auflösung einer Gleichung entstanden ist, in welcher x überall eine gerade Dimension hat, so wird man leicht sehen, daß jeder vorhergehende Ausdruck vier Wurzeln anzeigen kann, da alsdenn der erste also geschrieben wird . . . .

$z = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$, und der andere also $z = \mp\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx+p\pm\frac{q}{x}}}$.

Da diese beyden Gleichungen unterschieden zu seyn scheinen, so kann man befürchten, man habe sich in den vorhergehenden Schlüssen geirret, weil auf diese Art die Ungereimtheit zu erfolgen scheinet, daß man aus einer Gleichung vom

vierten Grade acht Wurzeln bekäme. Aber man kann leicht sehen, daß diese Ungereimtheit nur so zu erfolgen scheinet. Denn jene beyden Ausdrückungen sind gleichgeltend, woferne diese beyden $\sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}}$ und ......

$\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}}$, oder diese beyden . . $-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}$ und $--\frac{2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}$, . . gleichgeltend sind; und diese beyden letztern Größen müssen nothwendig einerley seyn, sobald x durch die Gleichung $x^6+2px^4+p^2x^2-q^2-4r=0$ ist bestimmet worden, weil man zu dieser Gleichung unmittelbar gelanget, woferne man $-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}$ und $\frac{-2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}$ einander gleich setzet.

XXVII.

Von den beyden vorhergehenden Ausdrücken wird der erstere ....

$z=\pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}}$, weil er am leichtesten anzuwenden ist, derjenige seyn, welchen man wählen muß, und die vier allgemeinen Werthe von z, welche er alle zugleich anzeigt, sind ....

$$z = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = \frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

XXVIII.

Man gelanget zu einerley Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade, man mag von den Wurzeln der reducirten Gleichung genommen haben, welche man gewollt hat.

Da die Gleichung, aus welcher man den Werth von x herleitet, nothwendig drey Werthe von x giebt, vor welchen das Zeichen $\pm$ steht, und da man keine Ursache hat, einen von diesen Werthen den andern vorzuziehen, da man ferner weis, daß eine Gleichung vom vierten Grade nicht mehr, als vier Wurzeln haben kann, so kann man ganz natürlich darauf fallen, daß man ohne Unterschied einen von diesen drey Werthen von x, vor welchen das $\pm$ steht, nehmen, und dennoch allemal einerley Ausdruck für die vier Werthe von z daraus herleiten kann.

Aber ob man gleich, wenn man der Theorie der Gleichungen ein wenig nachgedacht hat, nicht zweifeln kann, daß sich dieses wirklich also verhalte, so wird man doch wünschen, sich durch ausführliche Berechnungen davon zu versichern.

Man sieht wohl, daß, wenn man hierzu gelangen will, dieses das natürlichste ist, daß man die drey Werthe von x mit $\pm$, welche die Gleichung $x^6 + 2px^4 + (pp - 4r)x^2 - q = 0$ giebt, suchen, und sie hernach, einen nach dem andern, in dem Ausdrucke . . . .

$z =$

$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ an die gehörigen Stellen setzen muß, um zu sehen, daß die drey unterschiedenen Ausdrücke, welche man hierdurch bekäme, einerley sind. Aber die zu dieser Methode erforderliche Rechnung ist so weitläuftig, daß man sich nicht entschließen kann, sie bis ans Ende zu verfolgen. Hier ist eine andere Art, auf welche man eben dazu gelangen kann.

Ich merke erstlich an, daß, der Werth von x, welchen ich in dem allgemeinen Ausdrucke $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ an die gehörigen Stellen setze, mag seyn, welcher er will, die vier Werthe von z, welche durch diese Größe alle zugleich ausgedrücket werden, durch $i+k$, $i-k$; $-i+l$, $-i-l$ vorgestellet werden können; oder, welches einerley ist, daß die vier Wurzeln der Gleichung $z^4 + pzz + qz + r = 0$ durch $z-i-k$, $z-i+k$, $z+i-l$, $z+i+l$ vorgestellet werden können, da alsdenn i den Theil $\frac{1}{2}x$ des Werthes von z, und k und l die beyden Größen $\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$ und $\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$ vorstellen. Wenn ich nun diese vier Wurzeln durch einander vermehre, so bekomme ich die Gleichung ....

$$\begin{array}{llll} z^4 - 2iiz^2 & - 2ikkz & + i^4 & = 0. \\ - kk & + 2ill & - iikk & \\ - ll & & - iill & \\ & & + kkll & \end{array}$$

Wenn man diese Gleichung mit $z^4 + pzz + qz$

$+r=0$ vergleicht, so bekömmt man die Gleichung $p=-2ii-kk-ll$, $q=-2ikk+2ill$,
$$r=i^4-iikk-iill+kkll.$$
Durch diese Gleichungen wird die Gleichung $x^6+2px^4+ppx^2-q^2=0$ in . . . . .
$$\begin{array}{l} \\ -4r \end{array}$$
$$\begin{array}{lllll} x^6 & -4ii\,x^4 & +8iikk\,x^2 & -4iik^4 & =0 \\ & -2kk & +8iill, & +8iikkll & \\ & -2ll & +k^4 & & \\ & & -2kkll & -4iil^4 & \\ & & +l^4 & & \end{array}$$
verwandelt, wovon die Wurzeln sind . . . . . $x=\pm 2i$; $x=\pm k\pm l$; $x=\pm k\mp l$.

Wenn man nun einen von diesen Werthen von x, welchen man will, in den vier Ausdrückungen, welche in $z=\pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{p}{2}\mp\frac{q}{2x}}$, oder vielmehr in . . . .
$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}xx+ii+\tfrac{1}{2}kk+\tfrac{1}{2}ll\mp\frac{ill-ikk}{x}}$$
enthalten sind, an die gehörigen Stellen setzet, so wird man sehen, daß ebenfalls die vier Werthe von z, nämlich $i+k, i-k, -i+l, -i-l$, herauskommen werden.

XXIX.

Ausser dem, daß man sich durch das itzt gezeigte Mittel versichert, daß es einerley ist, man mag von den drey Wurzeln der reducirten Gleichung $x^6+2px^4+ppxx-qq=0$ neh-
$$\begin{array}{l} \\ -4r \end{array}$$
men, welche man will, um sie in der Gleichung $z^4+pz^2+qz+r=0$ an die gehörigen

Stellen

Stellen zu setzen, hat man zugleich Gelegenheit, eine wichtige Anmerkung über die Gleichungen vom vierten Grade zu machen. Sie besteht darinne, daß ihre Wurzeln allemal entweder alle viere wirklich, oder alle viere unmöglich sind, oder daß zwo von diesen vier Wurzeln wirklich, und die beyden andern unmöglich sind. Denn es ist nicht möglich, andere Voraussetzungen für die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung zu machen, sobald man versichert ist, wie wir itzo versichert worden, daß diese vier Wurzeln alle zugleich durch die Formel . . . .

Die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade sind alle wirklich, oder alle unmöglich, oder es sind ihrer zwo wirklich und zwo unmöglich.

$\pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}}$ ausgedrücket werden.

XXX.

Wenn man diesen Werth der Wurzeln der Gleichungen vom vierten Grade sieht, so sollte man anfänglich, weil x eine Quadratwurzel ist, meynen, daß wenn einige von diesen Wurzeln unmöglich sind, es unmögliche Wurzeln von einer andern Art seyn könnten, als die vom zweyten Grade sind, das ist, daß es, anstatt bloß die Summe einer wirklichen Größe und der Wurzel einer wirklichen, aber negativen, Größe, wie z. E. $a+\sqrt{-b}$, zu seyn, Größen seyn könnten, welche aus einfachen unmöglichen Wurzeln und aus der Wurzel anderer zum Theil wirklicher, zum Theil unmöglicher Größen, zusammengesetzet wären, dergleichen $\sqrt{-b}+\sqrt{a+\sqrt{-b}}$ ist. Aber man kann sich leicht versichern, daß alle unmögliche Wurzeln vom vierten Grade, eben

Die unmöglichen Wurzeln vom vierten Grade sind von eben der Art, wie die vom zweyten Grade.

eben so, wie die vom zweyten, nichts anders sind, als die Summen wirklicher Größen und der Wurzeln wirklicher und negativer Größen. Denn da wir eben itzo gesehen haben, daß, wenn man den Werth von z finden will, man nach Gefallen einen von den Werthen von xx wählen kann, welche die reducirte Gleichung giebt, und wenn man übrigens aus der Lehre von den Gleichungen anmerket, daß diese reducirte Gleichung, weil ihr letztes Glied, oder das Product aller Wurzeln, allezeit eine negative Größe $-qq$ ist, nothwendig einen positiven Werth von xx haben muß, so wird man sehen, daß x allemal eine wirkliche Größe seyn kann, und daß in diesem Falle $\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}}$, wenn es unmöglich ist, nichts anders seyn wird, als die Wurzel einer wirklichen und negativen Größe.

XXXI.

Wenn von den vier Wurzeln zwo wirklich und zwo unmöglich sind, so kann man die Gleichung vollkommen auflösen.

Eine andere Anmerkung, welche der XXVIII. §. an die Hand geben kann, ist diese, daß allemal, wenn von den vier Wurzeln zwo unmöglich und zwo wirklich sind, die reducirte Gleichung $x^6+2px^4+ppx^2-qq=0$ unter der
$$-4r$$
Zahl der durch die Formel im VI. §. vollkommen aufgelösten Gleichungen ist, daß ist, daß man alsdenn zu der völligen Auflösung der Gleichung $z^4+pz^2+qz+r=0$ gelanget.

Wenn die vier Wurzeln alle wirklich

Hingegen wenn die vier Wurzeln entweder alle wirklich, oder alle unmöglich sind, so kann die reducirte Gleichung nicht durch die Formel im VI.

VI. §. aufgelöset werden, und folglich gelanget man durch dieses Mittel nicht zu der Auflösung der Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

oder unmöglich sind, so ist es das Gegentheil.

Diese beyden Wahrheiten folgen daraus, daß die reducirte Gleichung . . . .

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & + 8iikkx^2 & - 4iik^4 & = 0 \\ - 2ll & + 8iill & + 8iikkll & \\ - 2kk & + k^4 & - 4iil^4 & \\ & - 2kkll & & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

das Product der drey Wurzeln $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ ist. Wenn aber auch nur eine von den beyden Größen k oder l unmöglich ist, so sind die beyden Wurzeln $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ unmöglich, und die reducirte Gleichung kann also nach der Formel im VI. §. aufgelöset werden.

Wenn hingegen k und l alle beyde wirklich, oder alle beyde unmöglich sind, so sind die drey Wurzeln $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ der reducirten Gleichung alle drey wirklich, und also kann sie die Formel im VI. §. nicht angeben. Also können bey dem vierten Grade, so, wie bey dem dritten, die Formeln der Auflösung nur auf diejenigen Gleichungen angewendet werden, welche zwo unmögliche Wurzeln haben.

XXXII.

Wenn man eine Gleichung vom vierten Grade aufzulösen hat, und wenn man, vermittelst derselben, die reducirte Gleichung . . . .

Wie man die Fälle der vier wirklichen und der

$x^6 -$

vier unmöglichen Wurzeln unterscheidet.

$$\begin{array}{l} x^6 + 2px^4 + ppx^2 - qq = 0 \\ \qquad\qquad\quad -4r \end{array}$$ gemacht hat,

und man findet, daß sie nicht unter der Formel im VI. §. begriffen ist, und man will sehen, ob alsdenn die vier Wurzeln alle wirklich, oder alle unmöglich sind, so kann man leicht durch die folgenden beyden Betrachtungen dazu gelangen, auf welche man ganz natürlich kömmt, wenn man die reducirte Gleichung des XXVIII. §. untersuchet.

1. Wenn die vier Wurzeln wirklich sind, so ist in der reducirten Gleichung . . . .

$$\begin{array}{llll} x^6 & -4iix^4 & +8iikkx^2 & -4iik^4 = 0, \\ & -2kk & +8iill & +8iikkll \\ & -2ll & +k^4 & -4iil^4 \\ & & -2kkll & \\ & & +l^4 & \end{array}$$ oder

Bedingung der vier wirklichen Wurzeln.

$$x^6 - 2\times\overline{2ii+kk+ll}\times x^4 + \overline{8ii\times\overline{kk+ll}+\overline{kk-ll}^2}\times x^2$$

$$-4ii\times\overline{kk-ll}^2 = 0,$$ nothwendig ein zweytes Glied negativ, und ein drittes positiv, weil $-2\times\overline{2ii+kk+ll}$ weder Null, noch positiv seyn kann, wenn $i, k, l,$ wirkliche Größen sind, und weil bey eben diesen Bedingungen $8ii\times\overline{kk+ll}+\overline{kk-ll}^2$ ebenfalls weder Null, noch negativ seyn kann.

2. Wenn hingegen die vier Wurzeln unmöglich sind, oder, welches einerley ist, wenn kk und ll negativ sind, so kann in der reducirten Gleichung, welche alsdenn also geschrieben werden muß . . . .

$x^6 -$

$$\begin{aligned} x^6 &- 4ii\,x^4 - 8iikk\,x^2 - 4iik^4 = 0, \text{ oder} \\ &+ 2kk \quad - 8iill \quad + 8iikkll \\ &+ 2ll \quad + k^4 \quad - 4iil^4 \\ &\qquad\quad - 2kkll \\ &\qquad\quad + l^4 \end{aligned}$$

$$x^6 + 2\times\overline{kk+ll-2ii}\times x^4 + \overline{\overline{kk+ll}\times\overline{kk+ll-8ii}-4kkll}\times x^2 - 4ii\times\overline{kk-ll}^2,$$

niemals zugleich das zweyte Glied negativ, und das dritte positiv seyn. Denn wenn $kk+ll$ kleiner ist, als $2ii$, welches das zweyte Glied negativ machen würde, so muß das dritte Glied $\overline{kk+ll}\times\overline{kk+ll-8ii}-4kkll$ nothwendig auch negativ seyn.

Bedingungen der vier unmöglichen Wurzeln.

XXXIII.

Eine jede Gleichung vom vierten Grade, welche kein zweytes Glied hat, und deren drittes Glied positiv ist, hat unmögliche Wurzeln.

Wenn man die Gleichung

$$\begin{aligned} z^4 &- 2iiz^2 - 2ikkz + \&c \\ &- kk \quad + 2ill \\ &- ll \end{aligned}$$

welche in eben dem XXVIII. §. vorkam, ansieht, so giebt sie Gelegenheit zu einer Anmerkung, aus welcher man in einigen Fällen sehen kann, ob eine Gleichung, in welcher die vier Wurzeln entweder alle wirklich oder alle unmöglich sind, unter dem erstern von diesen beyden Fällen, oder unter dem zweyten begriffen ist. Sie besteht darinne, daß eine jede Gleichung vom vierten Grade, deren zweytes Glied verschwunden, und deren drittes Glied positiv ist, nothwendig unmögliche Wurzeln haben muß, weil das dritte Glied aller dieser Gleichungen, welches durch $-\overline{2ii+kk+ll}\times z^2$ vorgestellet wird, niemals

positiv seyn kann, wenn ii, kk, ll, positiv sind, das ist, wenn die Wurzeln wirklich sind. Sobald man aber weis, daß eine Gleichung vom vierten Grade unmögliche Wurzeln hat, und sich über dieses versichert hat, daß ihre vier Wurzeln entweder alle wirklich, oder alle unmöglich seyn müssen, so wird man ohne fernere Mühe sehen können, welcher von den beyden Fällen Statt hat.

XXXIV.

Wenn man gesehen hat, daß die vier Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade wirklich sind, so wird es, ehe man die reducirte Gleichung derselben durch Näherung auflöset, um den Werth von x zu finden, welchen man in dem Werthe von z an seine Stellen setzen muß, gut seyn, nach den im dritten Theile gegebenen Methoden zu untersuchen, ob nicht etwan einige von ihren Wurzeln commensurabel sind. Wenn sie nur eine solche Wurzel hätte, so würde man in Findung der drey andern nicht viel gebessert seyn, weil eine Gleichung vom dritten Grade aufzulösen übrig bliebe, deren drey Wurzeln wirklich wären. Aber wenn die Gleichung vom vierten Grade zwo commensurable Wurzeln hätte, so würde sie aufgelöset seyn, sobald diese beyden Wurzeln gefunden wären, weil alsdenn nur eine Gleichung vom zweyten Grade aufzulösen übrig bliebe.

XXXV.

Vortheil, welchen man hat, Wenn eine Gleichung vom vierten Grade zwo commensurable Wurzeln hat, so kann man diesel-

dieselben in der reducirten Gleichung leichter wahrnehmen, als in ihr selbst. Denn es ist alsdenn klar, daß in den vier Werthen von z, welche überhaupt durch $i+k$; $i-k$; $-i+l$; $-i-l$, vorgestellet werden, i nothwendig allemal eine commensurable Größe seyn muß, und folglich wird $4ii$ in der Wurzel $xx-4ii$ der reducirten Gleichung eine quadrirte und commensurable Größe vorstellen. Durch diese Betrachtung aber kann man das nach dem XII. und XIII. §. im dritten Theile nöthige Versuchen sehr vermindern, weil man in den Theilern des letzten Gliedes nur eine quadrirte Größe mit dem Zeichen $-$ suchen darf.

wenn man die commensurablen Theiler vielmehr in der reducirten, als in der vorgegebenen Gleichung suchet.

Eben so würde es seyn, wenn sich die Gleichung $z^4+pzz+qz+r=0$ in zwo Gleichungen vom zweyten Grade, deren Coefficienten commensurabel wären, zergliedern ließe. Anstatt alsdenn die im XIX. §. des dritten Theils gezeigte Methode anzuwenden, müßte man sich der im XII. und XIII. §. daselbst gegebenen Methode bedienen, um die Theiler der reducirten Gleichung zu suchen, und unter den Theilern des letzten Gliedes nur die quadrirten Größen und welche das Zeichen $-$ haben, wählen.

XXXVI.

Wenn eine Gleichung, in welcher x auf den vierten Grad erhöhet ist, zwo commensurable Wurzeln hat, oder wenn sie bloß aus zween Theilern von zwo Dimensionen entstanden ist, so kann man sagen, daß sie wirklich nicht vom vierten Grade ist, und es ist ganz natürlich, daß

sie sich alsdenn nach der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade muß auflösen lassen. Aber es giebt Gleichungen, welche schlechterdings vom vierten Grade sind, und doch nach der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade aufgelöset werden können. Von dieser Art sind die Gleichungen, von welchen im XX. §. des vierten Theiles gehandelt worden, und diejenigen, welche der Gleichung . . . .

$$\begin{array}{l} z^4 + 2aazz - 8aabz + a^4 = 0 \\ \quad\;\; - 4ab \qquad\qquad\quad - 4a^3b \end{array}$$ ähnlich

sind, welche Gleichung das Product der beyden Gleichungen $zz - 2z\sqrt{ab} + aa - 2a\sqrt{ab} = 0$ und $zz + 2z\sqrt{ab} + aa + 2a\sqrt{ab} = 0$ ist, und deren vier Wurzeln sind . . . .

$\pm\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab - a^2 \pm 2a\sqrt{ab}}$, in welchen nur lauter Wurzelzeichen vom zweyten Grade sind.

Woraus man sehen kann, welches diejenigen Gleichungen vom vierten Grade sind, deren Wurzeln lauter Wurzelzeichen vom zweyten Grade haben.

Man kann alle Gleichungen, welche unter diesem Falle begriffen sind, leicht unterscheiden. Denn da in diesen Gleichungen der Theil $\pm\frac{1}{2}x$ des Ausdruckes $\pm\frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ des Werthes von z, oder, welches einerley ist, der den vier Wurzeln $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$, gemeine Theil i eine bloße Wurzelgröße vom zweyten Grade seyn muß, weil x in der reducirten Gleichung nur auf gerade Dimensionen steigt, so muß nothwendig in allen Gleichungen von dieser Art die reducirte Gleichung durch xx, $\pm$ einer commensurablen Größe, getheilet werden können. Nun kann man aber die

die Theiler von dieser Art nach der im XII. und XIII. §. des dritten Theiles gezeigten Methode leicht finden.

XXXVII.

Was man thun muß, um die beynahe wahren Werthe der vier Wurzeln zu bekommen, wenn sie wirklich sind.

Wenn man gesehen hat, daß die vier Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade alle wirklich sind, und daß diese Gleichung keinen commensurablen Theiler, auch keinen mit Wurzelzeichen vom zweyten Grade, hat, so muß man eine von den Wurzeln ihrer reducirten Gleichung, nach der im XXI. §. gezeigten Methode der Näherung, suchen; und wenn man sie in der allgemeinen Formel $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ an die Stelle des x setzet, so bekömmt man die beynahe wahren Werthe der vier gesuchten Wurzeln.

XXXVIII.

Anwendung der vorhergehenden Methoden auf ein Exempel.

Zu Anwendung der vorhergehenden Regeln wollen wir z. E. die Gleichung $z^4 + 3z^2 + 2z - 3 = 0$ vornehmen. Wenn man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ vergleicht, so bekömmt man $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$. Und wenn man diese Werthe in der allgemeinen reducirten Gleichung $x^6 + 2px^4 + (pp - 4r)xx - qq = 0$ an die gehörigen Stellen, setzet, so wird sie dadurch in $x^6 + 6x^4 + 21x^2 - 4 = 0$ verwandelt.

Diese Gleichung aufzulösen, wollen wir erstlich machen $x^2 = u - 2$, um das zweyte Glied weg zu bringen. Dadurch wird die reducirte Gleichung in $u^3 + 9u - 30 = 0$ verwandelt,

welche, nach dem XIV. §, unter diejenigen gehöret, die nur eine wirkliche Wurzel haben, und sie ist folglich unter denjenigen begriffen, welche nach der allgemeinen Formel im VI. §. aufgelöset werden können.

Hieraus sieht man, daß die vorgegebene Gleichung zwo wirkliche und zwo unmögliche Wurzeln haben muß, und daß man also dieselben alle viere durch die vorhergehenden Formeln ausdrücken kann.

Man hätte (XXXIII. §.) bloß daraus, daß das dritte Glied $3z^2$ dieser Gleichung einen positiven Coefficienten hat, sehen können, daß sie unmögliche Wurzeln haben müsse.

Wenn man nun die Gleichung $u^3 + 9u - 30 = 0$ nach der im VI. §. enthaltenen Formel auflöset, so bekömmt man für ihre wirkliche Wurzel $u = \sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}$; folglich ist $\pm\sqrt{u - 2}$ oder . . . .

$$x = \pm\sqrt{\sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}} - 2}.$$

Wenn man hernach diesen Werth von x in dem allgemeinen Werthe . . . .

$$z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{p}{2} + \tfrac{q}{2x}},$$ welcher in dem gegenwärtigen Falle ist . . . .

$$z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{3}{2} \mp \tfrac{1}{x}},$$ an die gehörigen Stellen setzet, so bekömmt man für die beyden wirklichen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung . . . .

$z =$

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}}-2}$$

$$\pm\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}}-1+\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}}-2}}}$$

und für die beyden unmöglichen . . . .

$$z = +\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}}-2}$$

$$\pm\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}}-1-\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}}-2}}}.$$

XXXIX.

Wir wollen nunmehr die Gleichung $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$ vornehmen. Wenn man sie mit der allgemeinen Gleichung vergleicht, so bekömmt man $p = -6$, $q = 8$, $r = -1$. Folglich wird die abgekürzte Gleichung seyn $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$. Wenn man in dieser Gleichung $x^2 = u + 4$ setzet, um das zweyte Glied wegzubringen, so bekömmt man $u^3 - 8u - 32 = 0$. Wenn man diese Formel mit der allgemeinen Formel im VI. §. vergleicht, so giebet sie einen einzigen wirklichen Werth, welcher ist . . . . Ein ander Exempel.

$$\sqrt[3]{16+\frac{80}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{16-\frac{80}{3\sqrt{3}}}$$ oder . . . . . .

$$u = \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{6}\sqrt{3}+10}+\sqrt[3]{2\sqrt{6}\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}},$$ welcher, wenn man sich der im XXXV. §. des vierten Theiles enthaltenen Methode bedienet, auf . . . . :

$u = \frac{2 \times \overline{1+\sqrt{3}} - 2 \times \overline{1-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 4$ abgekürzet wird. Wenn man nun diesen Werth von u in $x = \sqrt{u+4}$ an die gehörige Stelle setzet, so bekömmt man $x = \sqrt{8}$, wodurch man die allgemeine Gleichung . . . . $z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$ in . . . $z = \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{1 \mp \sqrt{2}}$ verwandelt, welche Gleichung für die beyden wirklichen Wurzeln der vorgegebenen Gleichung giebt $-\sqrt{2} \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}$, und für die beyden unmöglichen $+\sqrt{2} \pm \sqrt{1-\sqrt{2}}$. Also gehöret die vorgegebene Gleichung $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$ unter diejenigen, welche in zwo Gleichungen vom zweyten Grade, deren Coefficienten incommensurabel sind, können zergliedert werden. Denn beyde Paare der vorhergehenden Wurzeln sind die Wurzeln der Gleichungen $zz + 2z\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$ und $zz - 2z\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$.

Man hätte, ohne die Formel im VI. §. und folglich, ohne die im XXXV. §. des vierten Theiles gezeigte Methode anzuwenden, die Gleichung $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$ auflösen können, wenn man sich der im XII. und XIII. §. des dritten Theiles vorgetragenen Methode bedienet hätte. Denn man hätte durch diese Methode gefunden, daß diese Gleichung zum Theiler hat $xx - 8 = 0$.

XL.

XL.

Dritte Exempel.

Es sey die Gleichung $y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0$. Wenn man in dieser Gleichung $z-4$ für y setzet, um das zweyte Glied wegzubringen, so wird sie dadurch in $z^4+3z^2-52z+48=0$ verwandelt. Wenn man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung $z^4+pz^2+qz+r=0$ vergleicht, so giebt sie $p=3$; $q=-52$; $r=48$; und folglich die reducirte Gleichung $x^6+6x^4-183x^2-2704=0$. Wenn man aus dieser Gleichung das zweyte Glied wegschafft, indem man anstatt x^2 setzet $u-2$, so bekömmt man $u^3-195u-2322=0$, welche Gleichung sich nach der Formel im VI. §. auflösen läßt, und folglich zeigt, daß die vorgegebene Gleichung unter diejenigen gehöret, welche man vollkommen auflösen kann, das ist, unter diejenigen, welche zwo wirkliche und zwo unmögliche Wurzeln haben. Dieselben zu finden, wollen wir uns der im VI. §. enthaltenen Formel zu Auflösung der Gleichung $u^3-195u-2322=0$ bedienen, wodurch man für den einzigen wirklichen Werth, den sie giebt, bekömmt $u=\sqrt[3]{1161+\sqrt{1073296}}-\sqrt[3]{-1161+\sqrt{1073296}}$, welcher auf $\sqrt[3]{1161+1036}-\sqrt[3]{-1161+1036}$ oder auf $\sqrt[3]{2197}+\sqrt[3]{125}$, oder endlich auf 18, abgekürzet wird. Wenn man nun diesen Werth von u in $x=\sqrt{u-2}$ an die gehöri-

ge Stelle setzet, so bekömmt man $x = \sqrt{16} = 4$, welches man nunmehr nur in dem allgemeinen Werthe von $z = \pm \frac{1}{2}x \ldots \ldots \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} + \frac{q}{2x}}$ an die gehörigen Stellen setzen darf; wodurch man für die beyden wirklichen Wurzeln der Gleichung $z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0$ bekömmt $z = 2 \ldots \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} + \frac{13}{2}}$ oder $z = 2 \pm 1$, das ist, 3 oder 1, und für die beyden unmöglichen Wurzeln $z = -2 \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} - \frac{13}{2}}$, oder $z = -2 \pm \sqrt{-12}$. Wenn man hernach diese vier Werthe in $y = z - 4$ an die gehörige Stelle setzet, so wird man für die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$ bekommen $y = -1$; $y = -3$; $y = -6 \pm \sqrt{-12}$. Man hätte diese Wurzeln sowohl nach der im XII. und XIII. §. des dritten Theiles gegebenen Methode, als auch nach der in dem XXIV. §. eben desselben Theiles finden können, wenn man sie in der Gleichung $y^4 + 16y^3 + 99y^3 + 228y + 144 = 0$ gesuchet hätte. Denn nach der erstern von diesen beyden Methoden würde man die einfachen Theiler $y + 1$, $y + 3$ und für den Quotienten $yy + 12y + 48$ gefunden haben, und die letztere würde die beyden Theiler von zwo Dimensionen $yy + 4y + 3$, und $yy + 12y + 48$ gegeben haben. Man hätte auch diese Wurzeln gar leicht finden können, wenn man die Theiler der reducirten Gleichung,

chung, vermittelst der im XII. und XIII. §. des dritten Theiles gegebenen Methode gesuchet, und dabey dieses beobachtet hätte, daß man unter den Theilern der Zahl 2704 nur Quadratzahlen gewählet, und sie nur mit dem Zeichen — gebraucht hätte. Man würde alsdenn gefunden haben, daß diese reducirte Gleichung zum Theiler dieser Art habe $xx - 16 = 0$, welches giebt $x = 4$.

XLI.

Es sey die Gleichung $z^4 + 11z^2 - 2z + 56 = 0$. Wenn man sie mit $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ vergleicht, so bekömmt man $p = 11$, $q = -2$, $r = 56$. Daher ist die reducirte Gleichung $x^6 + 22x^4 - 103x^2 - 4 = 0$, aus welcher, wenn man das zweyte Glied weggebracht hat, $u^3 - \frac{793}{3}u + \frac{41582}{27} = 0$ wird. Da diese Gleichung eine von denjenigen ist, bey welchen die Formel im VI. §. nicht angewendet werden kann, so muß die vorgegebene Gleichung entweder eine von denen seyn, derer vier Wurzeln alle wirklich sind, oder eine von denen, derer vier Wurzeln alle unmöglich sind. Aber weil das Glied $11z^2$ positiv ist, so müssen (XXXIII. §.) unmögliche Wurzeln darinne seyn; folglich sind alle vier Wurzeln unmöglich. Ich kann alsdenn diese vier unmöglichen Wurzeln auf einfache unmögliche Wurzeln vom zweyten Grade bringen, wenn ich, nach dem XII. und XIII. §. des dritten Theiles, die Theiler der reducirten Gleichung suche. Denn da ich $xx - 4$ für den Theiler Viertes Exempel.

dieser

dieser reducirten Gleichung finde, so sehe ich sogleich, daß die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung sind $z = +1 \pm \sqrt{-6}$ und $z = -1 \pm \sqrt{-7}$.

XLII.

Fünftes Exempel.

Es sey nunmehr die Gleichung $z^4 - 5z^2 + 4z + 29 = 0$, welche durch die Vergleichung derselben mit $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ giebt $p = -5$, $q = 4$, $r = 29$, und folglich die reducirte Gleichung $x^6 - 10x^4 - 91 x^2 - 16 = 0$, welche, wenn man $x^2 = u + \frac{10}{3}$ setzet, in $u^3 - \frac{373}{3} u - \frac{10622}{27} = 0$ verwandelt wird. Da nun aber diese Gleichung eine von denen ist, welche nach der Formel im VI. §. nicht aufgelöset werden können, das ist, eine von denen, derer drey Wurzeln wirklich sind, so folget daraus, daß die gesuchten Wurzeln der Gleichung $z^4 - 5z^2 + 4z + 29 = 0$ entweder alle viere wirklich, oder alle viere unmöglich sind. Und wenn man sich erinnert, was man im XXXII. §. gesehen hat, daß nämlich, wenn die Wurzeln alle wirklich sind, das zweyte Glied der reducirten Gleichung negativ, das dritte positiv ꝛc. ist, so kann man daraus schließen, daß die vorgegebene Gleichung sich in dem Falle befindet, daß alle ihre Wurzeln unmöglich sind, weil das dritte Glied $-91x^2$ ihrer reducirten Gleichung negativ ist.

Aber man kann durch keine bekannte Methode diesen vier unmöglichen Wurzeln die ordentliche Form der unmöglichen Wurzeln vom

zwey-

zweyten Grade geben, wie in dem vorhergehenden Exempel geschehen ist. Denn da die reducirte Gleichung keinen commensurablen Theiler hat, so kann die vorgegebene Gleichung weder commensurable Theiler, noch Theiler mit einfachen Wurzelzeichen vom zweyten Grade haben.

XLIII.

Es sey die Gleichung $z^4 - 32zz - 16z - 2 = 0$, welche giebt $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$; und folglich ist die reducirte Gleichung $x^6 - 64x^4 + 1032x^2 - 256 = 0$. Sechstes Exempel.

Da die drey Wurzeln dieser Gleichung, wie man sich leicht davon versichern kann, wirklich sind, so erhellet daraus, daß alle Wurzeln der vorgegebenen Gleichung entweder wirklich, oder alle unmöglich seyn müssen. Man wird sich, wenn man den XXXII. §. zu Hülfe nimmt, leicht versichern können, daß hier der erstere von beyden Fällen Statt hat. Ich suche nunmehr, nach der im XII. und XIII. §. des dritten Theiles gezeigten Methode, die Theiler dieser reducirten Gleichung, und finde $xx - 32$, welches, vermittelst des allgemeinen Ausdruckes

$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ für die

vier gesuchten Wurzeln giebt . . . .

$2\sqrt{2} + \sqrt{8 + \sqrt{2}}$, $2\sqrt{2} - \sqrt{8 + \sqrt{2}}$,

$-2\sqrt{2} + \sqrt{8 - \sqrt{2}}$, $-2\sqrt{2} - \sqrt{8 - \sqrt{2}}$.

XLIV.

Es sey nunmehr die Gleichung $z^4 - 18z^2 + z + 70 = 0$, welche zur reducirten Glei- Siebentes Exempel.

chung

chung $x^6 - 36x^4 + 44x^2 - 1 = 0$ oder $u^3 - 388u - 2929 = 0$ giebt, wenn man das zweyte Glied dadurch wegschafft, daß man $x^2 = u + 12$ setzet.

Da nun die drey Wurzeln dieser Gleichung wirklich sind, und das zweyte Glied $36x^4$ negativ, das dritte $44x^2$ aber positiv ist, so folget nach dem XXXII. §. daraus, daß die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung wirklich sind. Ferner, da die reducirte Gleichung keinen commensurablen Theiler hat, wie man sich davon durch die im XII. und XIII. §. des dritten Theiles gezeigte Methode versichern kann, so muß man sich begnügen, die gesuchten Wurzeln durch Näherung zu finden.

Um deswillen muß man sich erstlich der Methode im XXI. §. bedienen, um die Gleichung $u^3 - 388u - 2929 = 0$ aufzulösen, und nachdem man 22, 74 für den Werth von u gefunden hat, so muß man diesen Werth in $x = \sqrt{u + 12}$ an seine Stelle setzen, welches 5, 894 für x giebt. Wenn man diesen Werth von x in $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ an die gehörigen Stellen setzte, so bekömmt man für die vier gesuchten Wurzeln + 3, 426; + 2, 467; − 2, 315; − 3, 579, welche den wahren Wurzeln sehr nahe kommen werden. Man hätte sie noch genauer haben können, wenn man die im XXI. §. gezeigte Methode zu Auf-

lösung

lösung der Gleichung $u^3 - 388u = 2929$ noch weiter getrieben hätte.

XLV.

Nachdem man bey den Auflösungen der Gleichungen sowohl vom zweyten als auch vom dritten und vierten Grade gesehen hat, wie man durch Hülfe der Wurzelzeichen den Werth der unbekannten Größe in diesen Gleichungen ausdrücken kann, so kann einem einfallen, zu untersuchen, wie man diejenigen Gleichungen finden könne, derer Wurzeln durch Wurzelgrößen ausgedrücket und bekannt sind. Man kann z. E. zu wissen verlangen, welches die Gleichung ist, deren Wurzel $x = \sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c}$ wäre, welches die Gleichung ist, in welcher x wäre $\sqrt[3]{a^3+b^3} - \sqrt[3]{a^3-b^3}$, u. dgl.

Um alle Aufgaben von dieser Art aufzulösen, oder, welches einerley ist, um die Wurzelgrößen einer jeden Gleichung wegzubringen, muß man es auf folgende Art anfangen, auf welche man leicht fallen konnte, nachdem man das überleget, was in dem XXXV. §. des zweyten Theiles gelehret worden.

Wie man die Wurzelgrößen aus einer jeden Gleichung wegbringt.

Man muß an die Stelle einer jeden Wurzelgröße eine unbekannte Größe setzen, und dadurch bekömmt man

1) anstatt der gegebenen Gleichung eine neue Gleichung, welche keine Wurzelgrößen mehr in sich enthält; 2) eben so viel Gleichungen mit zwey Gliedern, als Wurzelgrößen in

der vorgegebenen Gleichung waren. Nun kann man aber aus jeder von diesen Gleichungen mit zwey Gliedern sogleich ihre Wurzelzeichen wegbringen, wenn man ihre beyden Glieder auf diejenige Potenz erhöhet, die durch den Exponenten des Wurzelzeichens, welches eins von ihren Gliedern hat, angezeiget wird. Man darf also nur noch aus allen diesen von ihren Wurzelzeichen befreyten Gleichungen die hineingebrachten unbekannten Größen wegschaffen; welche Verrichtung in dem XXXV. §. des zweyten Theiles gezeigt worden.

Exempel. Damit wir das, was itzo gesagt worden, durch ein Exempel erläutern, so wollen wir die Wurzelgrößen aus der Gleichung $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{add}$ wegschaffen. Wenn man $\sqrt[3]{ab^2} = y$, und $\sqrt[3]{add} = z$, gemacht hat, so bekömmt man die drey Gleichungen $x = y + z$; $y^3 = ab^2$, $z^3 = ad^2$. Wenn man aus der ersten $y = x - z$ ziehet, und es in der andern an ihre Stelle setzet, so bekömmt man $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$, aus welcher Gleichung man nur, durch Hülfe der Gleichung $z^3 = ad^2$, das z wegschaffen darf.

Dieses zu verrichten, will ich erstlich in die erstere von diesen beyden Gleichungen $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$, anstatt z^3 setzen ad^2, welches die zweyte giebt; und so wird daraus $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$,

aus

aus welcher ich ziehe $z^2 = \frac{ad^2 + ab^2 - x^3 + 3x^2z}{3x}$.
Wenn ich hernach die beyden Hälften dieser Gleichung durch z vermehre, und anstatt z^3 seinen Werth ad^2 setze, so bekomme ich eine neue Gleichung $ad^2 = \frac{ad^2z + ab^2z - x^3z + 3x^2zz}{3x}$, welche giebt $zz = \frac{3ad^2x - ad^2z - ab^2z + x^3z}{3x^2}$.

Ich setze hernach diese beyden Werthe von zz einander gleich, und ziehe daraus eine Gleichung, in welcher z nur noch vom ersten Grade ist. Ich löse sie auf, und bekomme . . . . . $z = \frac{x^4 + 2ad^2x - ab^2x}{ab^2 + ad^2 + 2x^3}$. Wenn ich dieses in einer von den vorhergehenden Gleichungen, z. E. in $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, an die gehörigen Stellen setze, so kömmt endlich die Gleichung $x^9 - 3ad^2x^6 - 3ab^2x^6 + 3a^2b^4x^3 + 3a^2d^4x^3 - 21a^2d^2b^2x^3 = a^3b^6 + 3a^3b^4d^2 + 3a^3d^4b^2 + a^3d^6$ heraus, welche keine andere unbekannte Größe in sich enthält, als diejenige, die in der vorgegebenen Gleichung war, und welche gar keine Wurzelgröße hat. Eben so würde man es mit einer jeden vorgegebenen Gleichung machen.

Zuweilen ist es so leicht, aus den vorgegebenen Gleichungen die Wurzelgrößen wegzuschaffen, daß es unnütz wäre, sich der vorhergehenden Methode zu bedienen, und daß es genug wäre, die Glieder zu versetzen, und die beyden Hälften auf diejenige Potenz zu erhöhen, die durch das Wurzelzeichen, welches alsdenn in einer von beyden

Hälften allein ist, angezeiget wird. Wenn man z. E. die Gleichung $x = y + \sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^5 x}}$ hat, so bekömmt man, wenn man y auf die andere Seite bringt, und die beyden Hälften auf die dritte Potenz erhöhet, eine Gleichung, welche nun weiter keine andere Wurzelgröße hat, als $\sqrt{a^5 x}$. Wenn man alsdenn dieses Glied auf eine Seite allein bringt, und die beyden Hälften quadriret, so bekömmt man eine Gleichung, in welcher keine Wurzelgrößen mehr sind.

Und eben so würde es in vielen Fällen seyn.

Inhalt.

Erster Theil.

Von der algebraischen Methode, die Aufgaben durch Gleichungen auszudrücken, und von der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

I. Exempel einer Aufgabe, dergleichen diejenigen gewesen, welche sich vielleicht die ersten Algebraisten aufgegeben haben. 2. Seite.
Auflösung dieser Aufgabe, wie man sie ohne Algebra finden könnte. eb. das.
II. Algebraische Methode, die vorhergehende Aufgabe auszudrücken. 3
Das Zeichen + zeigt die Zusammensetzung an. 4
Das Zeichen = zeigt die Gleichheit an. e. d.
Eine Gleichung ist die Gleichheit zwoer Größen. e. d.
Man löset eine Gleichung auf, wenn man den Werth der unbekannten Größe findet, welche sie in sich enthält. 5
III. Auflösung der Gleichung, welche die vorhergehende Aufgabe ausdrückt. e. d.
Das Zeichen — zeigt das Abziehen an. e. d.
IV. Eine andere Auflösung der vorhergehenden Aufgabe. e. d.

V. Ein ander Exempel der vorhergehenden Aufgabe. 6
VI. Drittes Exempel der vorhergehenden Aufgabe. 7
Das Zeichen × zeigt die Vermehrung an. 8
VII. Eine neue Aufgabe, von eben der Art, wie die vorhergehende. 9
VIII. Die analytische Auflösung einer Aufgabe hat zween Theile. 10
In dem ersten drückt man die Aufgabe durch eine Gleichung aus. e. d.
In dem zweyten löset man diese Gleichung auf. 11
IX. Die Gleichungen vom ersten Grade sind diejenigen, wo die unbekannte Größe nur mit bekannten Größen vermehret oder getheilet wird. e. d.
X. Die Glieder einer Gleichung sind ihre durch die Zeichen + und — von einander abgesonderten Theile. 12
XI. Ein jedes Glied kann von einer Seite der Gleichung auf die andere versetzet werden, wenn man die Zeichen verwechselt. 13
XII. Man nennet die Hälften einer Gleichung ihre beyden durch das Zeichen = von einander abgesonderten Theile. 14
XIV. Wie man den Vermehrer einer unbekannten Größe wegschafft. 15
XV. Wie man den Theiler von einer unbekannten Größe wegschafft. 16
XVI. Exempel von Gleichungen vom ersten Grade, welche nach den vorhergehenden Grundsätzen aufgelöset werden. e. d.
XVII. Wie man die Brüche aus einer Gleichung wegschafft. 17
XVIII. Wie man sie auf eine andere Art alle auf einmahl wegschafft. 18
XIX. Dritte Aufgabe. 20
Man bedienet sich in der Algebra, wie in der Rechenkunst, eines Querstrichs, die Theilung anzuzeigen. e. d.
XXI. Eine andere Auflösung eben derselben Aufgabe. 23
XXII. Vierte Aufgabe. e. d.
Wie man die Verhältnisse in der Algebra ausdrückt. 24

XXIV.

XXIV. Allgemeine Auflösung der vorhergehenden Aufgabe. 28
Man bedienet sich der ersten Buchstaben des Alphabeths, das Bekannte, und der letzten, das Unbekannte auszudrücken. 29
Wenn Buchstaben ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen auf einander folgen, so zeigt dieses an, daß sie durch einander vermehret werden sollen. e. d.
XXV. Anwendung der vorhergehenden Auflösung auf Zahlen. 35
Eine andere Anwendung. e. d.
XXVI. Fünfte Aufgabe. 36
XXVII. Exempel in Zahlen. 38
XXVIII. Ein ander Exempel. e. d.
XXIX. Die im X. und folgenden §§. gegebene Regeln sind zu den Buchstabengleichungen hinlänglich. 39
Aus der Anwendung dieser Regeln sind viel algebraische Operationen entsprungen. 40
Erstes Exempel von Auflösung der Buchstabengleichungen. e. d.
XXX. Zweytes Exempel von Auflösung der Buchstabengleichung. e. d.
XXXI. Abkürzung der Größen, oder deren Verwandlung in ihre einfachste Ausdrückung. 41
Man nennet positive Glieder diejenigen, vor welchen ein +, und negative, diejenigen, vor welchen ein — steht. e. d.
XXXII. Die algebraische Zusammensetzung ist eben die vorhergehende Operation. 42
XXXIII. Wie man sagen kann, daß man eine negative Größe zu einer andern setze. 45
XXXIV. Aus der vorhergehenden Operation folgt auch die algebraische Abziehung. e. d.
Wie das Abziehen geschieht. 44
XXXV. Man vergrößert eine Größe, wenn man eine negative Größe davon abzieht. 46
XXXVI. Drittes Exempel, von der Auflösung der Buchstabengleichungen. 47
XXXVII. Eine über einen Buchstaben und zur Rechten desselben gesetzte Ziffer zeigt an, daß er so viel-

mal durch die Vermehrung hätte wiederholet werden sollen. 48

Und in diesem Falle sagt man, daß der Buchstabe zu derjenigen Potenz erhoben worden, welche die Ziffer ausdrückt, die man den Exponenten nennet. 49

Die Ziffern, welche zur Linken und in eben derselben Linie stehen, werden Coefficienten genennet. e. d.

XXXVIII. Viertes Exempel, von der Auflösung der Buchstabengleichungen. e. d.

XXXIX. Unverwickelte Größen sind diejenigen, welche nur ein Glied haben. 50

Die Vermehrung der unverwickelten Größen wird aus den beyden vorhergehenden Exempeln hergeleitet. 51

XL. Fünftes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichungen. e. d.

XLI. Die Theilung der unverwickelten Größen wird aus diesem Exempel hergeleitet. 52

XLII. Sechstes Exempel, von der Auflösung der Buchstabengleichungen. 53

Die Querstriche über den Größen dienen eben dazu, wozu die Haken dienen. 54

XLIII. Die Vermehrung der verwickelten oder vielgliederigen Größen wird aus dem vorhergehenden §. hergeleitet. 55

Exempel der Vermehrung vielgliederiger Größen. e. d.

XLIV. Grundregel der Vermehrungen. 57

XLV. Wie man bey dem Vermehren verfahren muß. 58

XLVI. Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel. 59

XLVII. Siebendes Exempel von der Auflösung der Buchstabengleichung. 61

Wie man die in diesem Exempel angedeutete Theilung verrichtet. 62

XLVIII. Allgemeine Methode der Theilung der verwickelten Größen. 63

Wie man alles Versuchen bey der Theilung vermeidet. 65

Was

Was eine Größe nach einerley Buchstaben ordnen heißt. 65
XLIX. Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel. 66
L. Ein ander Exempel. 69
LI. Was man bey Ordnung der Glieder zu beobachten hat, wenn verschiedene Buchstaben in Betrachtung kommen. 70
LII. Eine Aufgabe, in welcher zwo unbekannte Größen vorkommen. 71
LIV. Anwendung der vorhergehenden Auflösung auf ein Exempel. 76
LVI. Eine andere Aufgabe, in welcher zwo unbekannte Größen vorkommen. 77
LVII. Exempel der vorhergehenden Aufgabe in Zahlen. 80
LVIII. Ein ander Exempel. e. d.
Etwas besonders in den Ausdrücken, zu welchen man in diesem Exempel gelanget. 81
Wie man erfahren kann, was sie bedeuten. e. d.
LIX. Die Zeichen der Quotienten oder Producte betreffende allgemeine Lehrsätze. 82
LX. Es wird bewiesen, daß $-b$ durch $-d$, $+bd$ giebt, obgleich nichts vor diesen Größen vorhergeht. 83
LXI. Die übrigen Fälle werden auf eben diese Art bewiesen. e. d.
LXII. Wie der gefundene negative Werth die Aufgabe auflöset. 84
LXIII. Wenn die unbekannten Größen negativ werden, so muß man sie in einer Bedeutung nehmen, welche ihrer Bedeutung in der Ausdrückung der Aufgabe entgegengesetzt ist. 85
LXIV. Ein Exempel von dem Gebrauche der bekannten negativ genommenen Größen. 86
LXV. Ein ander Exempel von eben demselben Gebrauche der bekannten negativ genommenen Größen. 87
LXVI. Zwo Gleichungen vom ersten Grade, welche zwo unbekannte Größen haben, können allezeit nach den vorhergehenden aufgelöset werden. 89

Exempel. e. d.
LXVII. Ein ander Exempel. 90
LXVIII. Eine andere Art, eben dieses Exempel aufzulösen. 93
LXIX Vergleichung der beyden vorhergehenden Auflösungen mit einander. 94
LXXI. Allgemeine Methode, den größten gemeinen Theiler zwoer Zahlen zu finden. 97
LXXIII. Allgemeine Methode, den größten gemeinen Theiler algebraischer Größen zu finden. 101
LXXIV. Erstes Exempel. 102
LXXV. Zweytes Exempel. 105
LXXVI. Drittes Exempel. e. d.
LXXVII. Eine andere Art, eben dieses Exempel aufzulösen. 106
LXXVIII. Andere Größen, derer größter gemeiner Theiler, ohne die vorhergehende Methode, gefunden wird. 107
LXXIX. Wenn drey unbekannte Größen in einer Aufgabe sind, so muß man drey Gleichungen haben, um dieselbe aufzulösen. 108
Wie man die unbekannten Größen in diesen Gleichungen absondert. e. d.
LXXX. Eine Aufgabe, in welcher drey unbekannte Größen vorkommen. 109
LXXXI. Wie man die Berechnungen durch besondere Benennungen abkürzet. 111
LXXXII. Exempel der vorhergehenden Aufgabe in Zahlen. 112
LXXXIII. Alle Aufgaben vom ersten Grade mit drey unbekannten Größen, können, wenn sie in Gleichungen gebracht werden, in der vorhergehenden Aufgabe begriffen werden. 113

Zweyter Theil.

Von der Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade.

I. Eine Aufgabe, welche bey ihrer Allgemeinheit Aufgaben von allen Graden in sich hält. 118

II. Glei=

II. Gleichung der vorhergehenden Aufgabe für den Fall des zweyten Grades. 119
III. Für den dritten Grad. 120
IV. Für den Grad *n*. 121
V. Wie man zu der allgemeinen Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade gelanget. e. d.
Das Zeichen √ zeiget die Quadratwurzel an. 123
VI. Die Quadratwurzel einer Größe ist sowohl negativ, als positiv. 124
Eine Gleichung vom zweyten Grade hat zwo Wurzeln, das ist, zween Werthe von *x*. e. d.
VII. Formel, welche diese beyden Wurzeln in sich hält. e. d.
VIII. Anwendung der vorhergehenden Formel bey der Gleichung im II. §. 125
IX. Abkürzung des Werthes *x* durch Formirung der Wurzel des Products aus den Wurzeln derer Größen, welche durch einander vermehret werden. e. d.
X. Exempel von dieser Aufgabe. 126
XI. Ein ander Exempel. 127
XII. Drittes Exempel, welches, weil es die Wurzel einer negativen Grösse erfordert, unmöglich ist. 128
Diese Wurzeln werden unmögliche Wurzeln (radices imaginariae) genennet. e. d.
XIII. Welches die Gleichungen vom zweyten Grade sind, derer Wurzeln unmöglich sind. 129
XIV. Auflösung der Gleichungen vom zweyten Grade, ohne sie mit der allgemeinen Formel zu vergleichen. e. d.
XV. Eine andere Aufgabe vom zweyten Grade. 130
XVI. Von den beyden vorhergehenden Werthen ist nothwendig der eine positiv, der andere negativ. 132
XVII. Gebrauch des negativen Werthes. 133
XX. Neue Exempel, von Auflösungen der Gleichungen vom zweyten Grade. 136
XXI. Die Art, wie man die Quadratwurzel ausziehet, wird mit einem Exempel erläutert. 139
XXII. Andere Exempel, von Ausziehung der Quadratwurzel. 140
XXIII. Exempel von Abkürzung der Wurzelgrössen. 142
XXIV. Die Größen, welche keine vollkommene Wurzeln

haben, werden incommensurable Größen, oder Irrationalgrößen genennet. e. d.
Die Zusetzung und Abziehung dieser Größen setzet nichts, als ihre Abkürzung, voraus e. d.
XXV. Vermehrung der Irrationalgrößen. 143
XXVI. Theilung der Irrationalgrößen. 144
XXVII. Eine Aufgabe vom zweyten Grade mit mehr als einer unbekannten Größe. 145
XXVIII. Eine andere Art, die vorhergehenden Gleichungen aufzulösen. 148
XXIX. Ein Exempel einer Gleichung vom zweyten Grade mit zwo unbekannten Größen, welches noch verwickelter ist, als das vorhergehende. 149
Letzte Gleichung, zu welcher diese Gleichungen führen. e. d.
XXX. Wie man noch anders mit diesen Exempeln verfähret. 150
XXXII. Wenn y zu einem jeden Grade, welcher es auch sey, x aber nur auf den zweyten Grad erhöhet wäre: so verführe man mit den beyden Gleichungen auf eben diese Art. 521
XXXIII. Was man thun muß, wenn man zu der letzten Gleichung gelangen will, in dem Falle, da x auf den dritten Grad erhöhet wäre. 153
XXXIV. Eben so wäre zu verfahren, wenn x noch auf höhere Grade erhoben wäre. 155
XXXV. Und wenn mehr als zwo unbekannte Größen da wären; so würde man auf eben diese Art zu der letzten Gleichung gelangen. e. d.

Dritter Theil.

In welchem man einige allgemeine Grundregeln für die Gleichungen von allen Graden giebt, nebst der Methode, aus diesen Gleichungen die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade, welche sie etwan in sich haben, herzuleiten.

Dritter Theil.

I. Wie man eine Gleichung vermittelst ihrer Wurzeln macht. 158
II. Eine Gleichung hat eben so viel Wurzeln als Grade. 159
III. Eigenschaft der Gleichungen von allen Graden. 160
IV. In einer Gleichung, worinne das zweyte Glied fehlet, ist die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen Wurzeln gleich. 161
V. Eine Gleichung, welche kein bekanntes Glied hat, hat wenigstens eine Wurzel, gleich Null. e. d.
VI. Bedingungen, welche man bey einer Gleichung beobachten muß, darinne die vorhergehenden Eigenschaften zu finden. e. d.
VII. Eine Methode, die commensurablen Wurzeln einer Gleichung zu bekommen. 62
VIII. In einer Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind, kann die unbekannte Größe kein Bruch seyn. 164
IX Verwandlung, durch welche man die Brüche aus einer jeden Gleichung wegbringt. 165
X. Durch diese Verwandlung findet die vorhergehende Methode auch bey Gleichungen mit Brüchen statt. 166
XI. Unbequemlichkeit der vorhergehenden Methode. e. d.
XII. Betrachtungen, durch welche man diese Methode verbessert hat. 167
XIII. Grundsatz zu Findung der commensurablen Wurzeln. 168
XIV. Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel. 169
XVI. Wie man alle Theiler einer Zahl bekömmt. 174
XVII. Ein ander Exempel von der Methode, die commensurablen Wurzeln zu finden. 175
XVIII. Dritte Anwendung der Methode, die commensurablen Wurzeln zu finden. 177
XIX. Methode, die in einer gegebenen Gleichung befindlichen commensurablen Gleichungen vom zweyten Grade zu finden. 179
XX. Anwendung der vorhergehenden Methode. 182

XXI.

XXI. Eine andere Anwendung der vorhergehenden Methode. 187
XXII. Methode, die Theiler von einer Dimension zu finden, wenn das x einen Coefficienten hat. 190
XXIII. Anwendung dieser Methode auf ein Exempel. 191
XXIV. Methode, die Theiler von zwo Dimensionen zu finden, wenn das x einen Coefficienten hat. 193
XXV. Anwendung dieser Methode auf ein Exempel. 194
XXVI. Wenn eine Größe von weniger als sechs Dimensionen Theiler hat, so muß sie welche von weniger als drey Dimensionen haben. 196
XXVII. Wenn die Größe sechs oder mehr Dimensionen hat, so kann es seyn, daß sie keine andern Theiler hat, als solche, welche drey oder mehr Dimensionen haben. e. d.
XXIX. Methode, alle Theiler mit zween Buchstaben einer Gleichung, in welcher drey Buchstaben sind, zu finden. 198
XXX. Exempel. 199
XXXI. Ein ander Exempel. e. d.
XXXII. Methode, die Theiler mit drey Buchstaben und von einer Dimension zu finden. 200
XXXIII. Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel. 202
XXXIV. Ein ander Exempel. 203
XXXV. Drittes Exempel, in welchem die Theiler von zween Buchstaben zugleich mit den Theilern von drey Buchstaben gefunden werden. 205
XXXVI. Methode, die Theiler von zwo Dimensionen und mit drey Buchstaben zu finden. 208
XXXVII. Anwendung dieser Methode auf ein Exempel. 209
XXXVIII. Ein ander Exempel. 212
Anwendung der im XIV. §. angegebenen Methode, alle Theiler einer Zahl zu finden, auf Buchstabengrößen. 213

XL. Was man thun muß, wenn man die Theiler der Größen, welche nicht gleichartig sind, finden will. 218
XLI. Ein Fall, in welchem man den Theiler leichter, als durch die vorhergehenden Methoden findet. 219

Vierter Theil.

Von der Auflösung der Gleichungen von jeglichen Graden, wenn sie nicht mehr als zwey Glieder haben, oder wenn sie zwar drey Glieder haben, aber durch Hülfe der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade, auf zwey Glieder gebracht werden können; nebst verschiedenen um dieser Gleichungen willen anzustellenden Verrichtungen, z. E. der Erhöhung der Potenzen, der Ausziehung der Wurzeln, der Entwickelung der Wurzelgrößen ꝛc.

I. Von den Gleichungen vom dritten Grade mit zwey Gliedern. 222
Man setzet eine 3 über das Zeichen √, um die Cubicwurzel auszudrücken. e. d.
II. Die cubischen Wurzelgrößen können nur ein Zeichen auf einmal haben. 223
IV. Wie man die cubischen Wurzelgrößen vermehret. 225
V. Wurzeln der Gleichung vom dritten Grade mit zwey Gliedern.
VI. Von den Gleichungen von zwey Gliedern und von einem jeglichen Grade. e. d.
Diese Gleichungen können niemahls mehr als zwo wirkliche Wurzeln haben. 226
VII. Betrachtungen über die Erhöhung der Potenzen. 227
VIII. Anwendung der vorhergehenden Betrachtungen auf die Ausziehung der Wurzeln. 228
IX. Von der Ausziehung der Wurzeln, wenn man unvollkommene Potenzen hat. 229

XI. Woraus der Cubus einer binomischen Größe besteht. 231
XII. Methode zu Ausziehung der Cubicwurzel aus zusammengesetzten Größen. e. d.
XIII. Erstes Exempel. 232
XIV. Zweytes Exempel. 233
XV. Zusammensetzungen und Abziehungen der Wurzelgrößen von jeglicher Art. 234
XVI. Vermehrung und Theilung der Wurzelgrößen, welche einerley Exponenten haben. 235
XVII. Um dieses mit Wurzelgrößen von verschiedenen Exponenten zu verrichten, muß man sie auf einerley Exponenten bringen. 236
Methode dieser Reduction. e. d.
XVIII. Wie man die vorhergehenden Operationen auf eine andere Art verrichtet. 238
XIX. Was eine Bruchpotenz ist. 243
Was eine negative Potenz ist. e. d.
Was die Potenz *o* ist. 244
XX. Von den Gleichungen mit drey Gliedern, welche nach der Methode der Gleichungen vom zweyten Grade aufgelöset werden. 246
XXI. Exempel der vorhergehenden Methode. 247
XXII. Ein ander Exempel. e. d.
XXIII. Drittes Exempel. 248
XXIV. Viertes Exempel. e. d.
XXV. Methode, die Quadratwurzeln der Größen, welche zum Theil commensurabel, zum Theil Wurzelgrößen sind, zu finden. 250
XXVI. Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel. 252
XXVII. Ein ander Exempel. 253
XXIX. Drittes Exempel. e. d.
XXX. Viertes Exempel. e. d.
XXXI. Methode, die Cubicwurzel derer Größen zu finden, welche zum Theil commensurabel und zum Theil incommensurabel sind. 255
XXXII. Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel. 259

XXXIII. Ein ander Exempel. 260
XXXV. Methode, die Cubicwurzeln der zum Theile commensurablen, zum Theil incommensurablen Zahlengrößen zu finden. 262
XXXVI. Anwendung der vorhergehenden Methode auf ein Exempel. 264
XXXVII. Ein ander Exempel. 265
XXXVIII. Wie man die vorhergehende Methode einfacher macht. 266
XXXIX. Anwendung dieser neuen Methode.
XL. Diese neue Methode könnte in denen Fällen fehlerhaft werden, da *A* und *B* verschiedene Zeichen haben. 367
Was man in diesem Falle zu thun hat. 268
XLI. Ein Fall, in welchem die vorhergehende Methode zu einem Irrthume verleiten könnte. 270
Wie man sich davor in Acht nehmen kann. 271
XLIII. Was man zu thun hat, wenn die Cubicwurzel die Summe zwoer Wurzelgrößen seyn soll. 273
XLIV. Wie man die Wurzel vom vierten Grade von denen Größen findet, welche von eben der Art sind, wie die vorhergehenden. e. d.
XLV. Was man allemal thun muß, wenn der Exponent der Wurzel eine gerade Zahl ist. 274
XLVI. Für die Wurzeln vom fünften Grade. e. d.
XLVII. Für die Wurzeln von jedem Grade *m*. e. d.
XLVIII. Von der Art, eine zweytheilige Größe auf eine jede Potenz zu erhöhen. 276
Allgemeine Formel für die Erhöhung des $p + q$ auf die Potenz *m*. 281
L. Beweis des im XLVII. §. enthaltenen Lehrsatzes. 282.
LI. Anwendung der vorhergehenden Formel auf ein Exempel. 283
LII. Wie man die vorhergehende Formel auf Größen von mehr, als zwey Gliedern anwendet. 284
LIII. Exempel. 285
LIV. Es wird gezeiget, daß die vorhergehende Formel noch gültig ist, wenn der Exponent ein Bruch ist. 287

LV. Eben diese Formel erstreckt sich auch auf die negativen Potenzen. 289
LVI. Exempel einer durch die Formel der Erhöhung der Potenzen gefundenen Quadratwurzel. 291
LVII. Wenn die Größen keine vollkommenen Wurzeln haben, so findet man welche nach der vorhergehenden Methode, welche ihnen nahe kommen. 293
Exempel. e. d.
Was eine unendliche Reihe ist. e. d.
LVIII. Alle Arten von Größen können durch die vorhergehende Formel in Reihen ausgedrücket werden. 295

Fünfter Theil.

Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade.

I. Die am meisten zusammengesetzte Gleichung vom dritten Grade. 298
II. Verwandlung, durch welche man aus dieser Gleichung ein Glied wegbringt, welches man will. e. d.
III. Anwendung der vorhergehenden Verwandlung auf eine Gleichung vom vierten Grade. 301
Man schafft gemeiniglich nur das zweyte Glied weg. e. d.
IV. Wegschaffung des zweyten Gliedes in einer Gleichung vom fünften Grade. 302
V. In einer Gleichung von einem jeglichen Grade m. e. d.
VI. Auflösung der allgemeinen Gleichung $x^3 + p x + q = 0$.
VII. Die vorhergehende Formel giebt nur eine von den drey Wurzeln. 305
Wie man die beyden andern bekömmt. e. d.
VIII. Ein Fall, in welchem die vorhergehende Formel das x nicht bekannt machen kann, wegen der darinnen enthaltenen unmöglichen Wurzeln. 306
IX. Es wird dennoch bewiesen, daß x in diesem Falle wirklich ist. 307
X. Durch eben diese Methode kann man durch Näherung einen Werth von x finden. 309

XI. Die beyden andern Werthe von x sind in eben dem Falle auch wirklich. 310

XII. Wie man aus den Wurzeln der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ die Wurzeln der Gleichung $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ erhält. 311

XIII. In einer Gleichung vom dritten Grade sind ihre drey Wurzeln wirklich, oder es ist eine wirklich, und zwo sind unmöglich. e. d.

XIV. Wie man diese Fälle unterscheidet. 312

XV. Wie die Wurzeln beschaffen sind, wenn $\frac{1}{27}p^3$ negativ und $= \frac{1}{4}qq$ ist. e. d.

XVI. Anwendung der vorhergehenden Methoden auf ein Exempel. 313

XVII. Ein ander Exempel, an einer Gleichung vom sechsten Grade, welche auf den dritten Grad heruntergesetzt wird. 314

Gleichungen von höhern Graden, welche auch heruntergesetzt werden können. 315

XIX. Viertes Exempel, in welchem die Formel im VI. §. unzulänglich ist. 317

Anwendung des X. §. durch Näherung die Wurzeln zu finden. e. d.

XX. Unbequemlichkeit der im X. §. gezeigten Methode. 319

XXI. Eine andere Methode einer allgemeinen Näherung, welche in der Ausdrückung leichter ist. 320

Die itzt gezeigte Methode giebt gleich anfänglich x wenigstens bis auf $\frac{1}{1000}$ richtig an. 322

XXII. Wie man die Näherung viel richtiger macht. 322

XXIII. Anwendung dieser Methode auf ein Exempel. 324

XXIV. Ein ander Exempel. e. d.

XXV. Auflösung der allgemeinen Gleichung vom vierten Grade. 325

Die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade kömmt auf eine Gleichung vom dritten Grade an: Diese Gleichung wird die reducirte genennet. 327

XXVI. Bey dem vierten Grade kann man die vier Wurzeln durch eine einzige Formel auszudrücken. 328

XXVIII. Man gelanget zu einerley Wurzeln einer Gleichung, vom vierten Grade, man mag von der reducirten Gleichung eine Wurzel genommen haben, welche man will. 330

XXIX. Die Wurzeln einer Gleichung vom vierten Grade sind alle wirklich, oder alle unmöglich, oder es sind ihrer zwo unmöglich und zwo wirklich. 333

XXX. Die unmöglichen Wurzeln vom vierten Grade sind eben so beschaffen, wie die vom zweyten Grade. 333

XXXI. Wenn von den vier Wurzeln zwo wirklich und zwo unmöglich sind, so löset man die Gleichung vollkommen auf.

Das Gegentheil geschieht, wenn die vier Wurzeln alle wirklich, oder alle unmöglich sind. 334

XXXII. Wie man den Fall der vier wirklichen Wurzeln von dem Falle der vier unmöglichen Wurzeln unterscheidet. 335

Bedingungen der vier wirklichen Wurzeln. 336

Bedingungen der vier unmöglichen Wurzeln. 337

XXXIII. Eine jede Gleichung vom vierten Grade, welche kein zweytes Glied hat, und deren drittes Glied positiv ist, hat unmögliche Wurzeln. e. d.

XXXV. Vortheil, den man hat, wenn man die commensurablen Theiler vielmehr in der reducirten Gleichung sucht, als in der vorgegebenen. 339

XXXVI. Woran man die Gleichung vom vierten Grade kennen kann, deren Wurzeln keine andern Wurzelzeichen, als vom zweyten Grade, haben. 340

Fünfter Theil.

XXXVII. Was man thun muß, um die beynahe wahren Werthe deren vier Wurzeln, wenn sie wirklich sind, zu bekommen. 341

XXXVIII. Anwendung der vorhergehenden Methoden auf ein Exempel. e. d.

XXXIX. Ein ander Exempel. 343

XL. Drittes Exempel. 345

XLI. Viertes Exempel. 347

XLII. Fünftes Exempel einer Gleichung. 348

XLIII. Sechstes Exempel. 349

XLIV. Siebendes Exempel. 350

XLV. Wie man die Wurzelgrößen aus einer jeden Gleichung wegbringt. 351

Druckfehler.

Auf der 143 Seite in der 5 Zeile lese man $\left(\frac{aa}{\sqrt{3}} - bc\right)\times$ anstatt $\left(\frac{aa}{\sqrt{3}} - bc\times\right)$

= = 154 S. = = 18 Z. = = $\delta\times\overline{\Phi\alpha-\varepsilon\beta}$ = $\delta\times\Phi\alpha-\varepsilon\beta$

= = 213 S. in dem Marginale = = zu finden, auf Buchstabengrößen, = = mit Buchstabengrößen zu finden.

= = 243 S. in der letzten Z. lese man $\frac{1}{a^m}$ = $\frac{1}{am}$

= = 274 S. fehlet beym XLVII. §. das Marginal: Für die Wurzeln von jedem Grade *m*.

= = 314 Seite in der 8 Zeile soll stehen . . . . . .

$$\sqrt[3]{-\sqrt{\tfrac{1}{2}q}+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

Dem Buchbinder dienet zur Nachricht, daß zu diesem Buche 10 Tabellen gehören. Die I. wird neben die 62. die II. neben die 72. die III. neben die 142. die IV. neben die 186. die V. neben die 196. die VI. neben die 208. die VII. neben die 216. die VIII. neben die 246. die IX. und X. neben die 290. Seite geheftet.

Wittenberg,
gedruckt bey Johann Friedrich Schlomach.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Clairaut, Alexis Claude,

Anfangsgründe der Algebra

Berlin 1752

Math.p. 78 g
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081596-4
VD18 10536914-002